

5. Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier
Wintersemester 2003/04
Abgabe: Di, 25.11.03, in der Vorlesung

AUFGABE 19:

Im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^5$ seien folgende Vektoren gegeben:

$$u_1 := (-1, 4, -3, 0, 3), \quad u_2 := (2, -6, 5, 0, -2), \quad u_3 := (-2, 2, -3, 0, -6);$$

$$w := (0, 1, 2, 3, 4).$$

Bestimme ein lineares inhomogenes Gleichungssystem, für dessen Lösungsmenge L gilt:

$$L = w + U \quad \text{mit} \quad U := \text{span}(u_1, u_2, u_3).$$

AUFGABE 20:

Es sei U_1 der von den Vektoren

$$v_1 := (1, 1, 2, 1), \quad v_2 := (0, -2, 1, 0), \quad v_3 := (1, -1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4,$$

sowie U_2 der von den Vektoren

$$w_1 := (3, 1, 7, 3), \quad w_2 := (-3, 2, -5, -1), \quad w_3 := (0, 3, 2, 2) \in \mathbb{R}^4,$$

aufgespannte lineare Teilraum von $\mathbb{R}^4$. Bestimme jeweils die Dimension und eine Basis von U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ sowie $U_1 + U_2$.

AUFGABE 21:

(i) Im $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sei für $n \in \mathbb{N}$ gegeben:

$$\begin{aligned} \phi_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n. \end{aligned}$$

Ist die Familie $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ linear unabhängig?

(ii) Betrachte den Vektorraum der Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Für $A \subset \mathbb{N}$ sei gegeben:

$$\begin{aligned} \chi_A : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in A \\ 0, & \text{falls } n \in \mathbb{N} - A. \end{cases} \end{aligned}$$

(χ_A heißt Indikatorfunktion von A .) Untersuche, ob die Familie $(\chi_A)_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}}$ linear unabhängig ist; dabei bezeichne $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$.

(iii) Sei $\{v_1, v_2\}$ die Basis eines 2-dimensionalen reellen Vektorraums V . Für welche reellen Zahlen s, t ist die Menge $\{w_1, w_2\}$ mit

$$\begin{aligned} w_1 &:= sv_1 + v_2, \\ w_2 &:= v_1 + tv_2 \end{aligned}$$

ebenfalls ein Basis von V ?

AUFGABE 22:

(i) Seien U_1 und U_2 lineare Unterräume eines reellen Vektorraums V . Wir definieren:

$$U_1 - U_2 := \{u_1 - u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

Welche der folgenden Aussagen gelten dann

- (a) $U_1 - U_2 = \{0\}$
- (b) $U_1 - U_2 = \emptyset$
- (c) $U_1 - U_2 = U_1 + U_2$?

(ii) Zeige: Seien U_1 und U_2 komplementäre Untervektorräume des Vektorraums V . Wenn B_1 eine Basis von U_1 und B_2 eine Basis von U_2 ist, dann ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V .

AUFGABE 23:

(i) Im $\mathbb{R}^3$ sei die Gerade $U = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 0)$ gegeben. Bestimme alle 2-dimensionalen linearen Unterräume H in $\mathbb{R}^3$ mit $U \subset H$ und zeige, dass deren Durchschnitt genau U ist.

(ii) Nun sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Beweise:

Ist $n \geq 2$, so existieren zu einem vorgegebenen $(n-2)$ -dimensionalen Untervektorraum U von V unendlich viele $(n-1)$ -dimensionale lineare Unterräume H in V mit $U \subset H$, deren Durchschnitt genau U ist.