

4. Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier
Wintersemester 2003/04
Abgabe: Di, 18.11.03, in der Vorlesung

AUFGABE 15:

(i) Im $\mathbb{R}^4$ seien folgende Mengen gegeben:

$$\begin{aligned}M_1 &:= \{(1, 0, 0, 0), (0, 9, 0, 0), (0, 0, 7, 0), (0, 0, 0, 3)\} \\M_2 &:= \{(0, 6, 0, -3), (0, -2, 0, 1/2)\} \\M_3 &:= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0\} \\M_4 &:= \{(-63, 36, 9, -54), (42, -24, -6, 36), (49, -28, -7, 42)\}\end{aligned}$$

Bestimme den von M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) aufgespannten linearen Unterraum.

(ii) Liegt der Vektor $(3, -1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ im Untervektorraum, der von den Vektoren $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ und $(1, 1, 9, -5)$ aufgespannt wird?

(iii) Es sei V ein reeller Vektorraum und $M, N \subset V$. Beweise oder widerlege:

$$\begin{aligned}\text{span}(M \cap N) &= \text{span}(M) \cap \text{span}(N) \\ \text{span}(M) + \text{span}(N) &= \text{span}(M \cup N) \\ \text{span}(M) = \text{span}(N) &\Rightarrow M \subset N \text{ oder } N \subset M \\ M \subset N &\Rightarrow \text{span}(V \setminus N) \subset \text{span}(V \setminus M)\end{aligned}$$

AUFGABE 16:

(i) Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für welche die Vektoren

$$(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)$$

den gesamten $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

(ii) Bestimme alle $b \in \mathbb{R}$, für welche die Vektoren

$$(b, 1, 1, 1), (1, b, 1, 1), (1, 1, b, 1), (1, 1, 1, b)$$

den gesamten $\mathbb{R}^4$ aufspannen.

AUFGABE 17:

- (i) Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$ Vektoren und $w_i := \sum_{j=1}^i v_j$ für $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn die Vektoren $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind.
- (ii) Gib im $\mathbb{R}^3$ 1001 Vektoren an, von denen je drei linear unabhängig sind.
- (iii) Es seien x und y linear unabhängige Vektoren eines $\mathbb{R}$ -Vektorraums V . Sind dann auch für beliebiges $z \in V$ die Vektoren $x + z$ und $y + z$ linear unabhängig?

AUFGABE 18:

Seien U_1, U_2, U Untervektorräume eines reellen Vektorraums V .

- (i) Es gelte $U_1 + U = U_2 + U$. Gilt dann $U_1 = U_2$?
- (ii) Gelten die folgenden Beziehungen?

$$\begin{aligned} \dim(U \cap (U_1 + U_2)) &= \dim(U \cap U_1) + \dim(U \cap U_2) - \dim(U \cap U_1 \cap U_2) \\ \dim(U + U_1 + U_2) &= \dim(U + U_1) + \dim(U + U_2) - \dim(U + (U_1 \cap U_2)) \end{aligned}$$

- (iii) Zeige, dass ein reeller Vektorraum niemals eine Vereinigung von endlich vielen echten Untervektorräumen ist.