

3. Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier

Wintersemester 2003/04

Abgabe: Di, 11.11.03, in der Vorlesung

AUFGABE 10:

Betrachte folgende Verknüpfungen:

$$\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \oplus y := \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ a \odot x := \sqrt[3]{a} \cdot x$$

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ a * (x_1, x_2) := (0, a \cdot x)$$

Untersuche, ob die folgenden Tripel die Vektorraumaxiome erfüllen (hierbei ist "·" die übliche Multiplikation):

(a) $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$,

(b) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$,

(c) $(\mathbb{R}^2, +, *)$.

AUFGABE 11:

Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume des $\mathbb{R}^2$, welche nicht:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = 0\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + 1 = 0\} \cup \{(0, 0)\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2a, y = 3a \text{ für ein } a \in \mathbb{R}\}$

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -3\}$

(h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 > 0\}$

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 20xy - 4x^2 - 25y^2 = 0\}$

AUFGABE 12:

Seien U_1, U_2, U_3 lineare Unterräume von $\mathbb{R}^n$.

- (i) Welche Geraden in $\mathbb{R}^n$ sind Untervektorräume?
- (ii) Zeige, dass der Durchschnitt von U_1 und U_2 wieder ein linearer Unterraum ist.
- (iii) Zeige an einem Beispiel, dass i.a. gilt:

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) \neq U_1 \cap U_2 + U_1 \cap U_3.$$

- (iv) Beweise folgende Implikation:

$$U_2 \subset U_1 \Rightarrow U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_1 \cap U_2 + U_1 \cap U_3.$$

Gilt hiervon auch die Umkehrung?

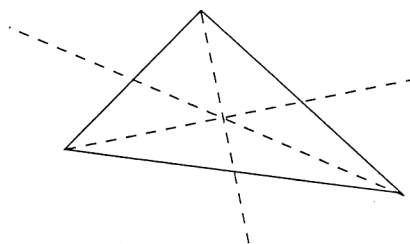
AUFGABE 13:

Sind die folgenden Mengen zusammen mit der natürlichen Addition und Skalarmultiplikation mit Elementen aus $\mathbb{R}$ reelle Vektorräume?

- (a) Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) Menge der reellen Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. (D.h. $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$).
- (d) Menge der ganzzahligen Folgen $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

AUFGABE 14*:

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sind die Verbindungsgeraden von Seitenmitten mit den gegenüberliegenden Ecken:



Beweise, dass sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden.