

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Birkenhake / Neumaier
Wintersemester 2003/04

AUFGABE 1:

(i) Berechne die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 17x_3 & + & 11x_4 & = & 28 \end{array}$$

(ii) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & & = & 0 \\ x_1 & & & & & + & ax_4 & - & ax_5 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & & & 2x_5 & = & 2 \end{array}$$

- (a) Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $a = 1$.
(b) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, für welches das Gleichungssystem keine Lösung hat?
(c) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, für welches das Gleichungssystem genau eine Lösung hat?

AUFGABE 2:

(i) (a) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & (a+1)x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ ax_1 & & & + & bx_3 & = & -2 \end{array}$$

keine Lösung in $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimme im Fall $b = 1$ alle Lösungen.

(ii) Für welche reelle Zahl b hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & bx_2 & + & x_3 & = & 4 \\ bx_1 & + & 3x_2 & + & bx_3 & = & -2 \end{array}$$

keine, genau eine, unendlich viele Lösungen? Gib im letzten Fall die Lösungsmenge an.

AUFGABE 3:

Bestimme die Lösungsmenge (in $\mathbb{R}^5$) des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 + \lambda \\ x_1 & & & + & \lambda x_3 & & & + & x_5 & = & 2 \end{array}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

AUFGABE 4:

Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem mit $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & y & & & = & \mu \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \mu \\ & & y & + & \lambda z & = & \mu \end{array}$$

Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist dieses Gleichungssystem lösbar.