

Probeklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Name: _____

Matrikelnr.: _____ Geb. Datum: _____

Aufgabe 1:

Gebe drei verschiedene Basen von $\mathbb{F}_5^3$ an.

Aufgabe 2:

Begründe, ob folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 7$ Untervektorräume sind und bestimme gegebenenfalls die Dimension und eine Basis

- (1) $U_1 := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 - 3x_2 + 2x_5 = 0\}$,
- (2) $U_2 := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = 2, x_2 = 0, x_4 = x_7\}$,
- (3) $U_3 := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \cdot x_5 = 0\}$.
- (4) $U_4 := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 0\}$.

Aufgabe 3:

Sei V die Menge aller Polynome $p(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0$ vom Grad ≤ 3 mit reellen Koeffizienten λ_i .

- (1) Zeige, daß V zusammen mit der Addition von Polynomen und der Skalarmultiplikation $(c, p) \mapsto c \cdot p$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.
- (2) Zeige, daß $f : V \rightarrow V, p \mapsto \frac{dp}{d\lambda}$ eine lineare Abbildung ist.
- (3) Bestimme die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3$.
- (4) Bestimme $\ker f$ und $\operatorname{im} f$.

Aufgabe 4:

Seien U, V, W $\mathbb{K}$ -Vektorräume und $g : U \rightarrow V$ und $f : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Zeige, daß $f \circ g$ genau dann injektiv ist, wenn g injektiv ist und $\ker f \cap \operatorname{im} g = 0$.

Aufgabe 5:

Sei $M \subset M_{r+s}(\mathbb{R})$ die Menge der oberen Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A \in M_r(\mathbb{R}), B \in M(r \times s, \mathbb{R}), D \in M_s(\mathbb{R}).$$

- (1) Zeige, daß M bezüglich der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.
- (2) $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ ist genau dann invertierbar, wenn A und D invertierbar sind. Bestimme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1}$, falls es existiert.

Aufgabe 6:

Es sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimme eine Orthonormalbasis von U .

Aufgabe 7:

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8:

- (1) Beweise, daß die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden.

- (2) Bestimme die Übergangsmatrix zwischen der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 und der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 .
- (3) Gibt es eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

- (4) Gibt die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von $\mathbb{R}^4$ und der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an.
- (5) Gib die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasen an.

Aufgabe 9:

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 1 \\ -2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme das charakteristische Polynom χ_A .
- (2) Bestimme die Eigenwerte von A .
- (3) Ist A diagonalisierbar?
- (4) Bestimme die Dimension der Eigenräume von A .