Lineare Algebra und Analytische Geometrie II: Antworten zu den Klausurfragen

Ervand Kandelaki

19. Juli 2004

1

Konvergenz in $M_d(\mathbb{C})$:
$A_n = (a_{ijn})_{i,j=1,..,d} \to A = (a_{ij})_{i,j=1,..,d}$ bedeutet: $\forall i, j = 1,..,d$ gilt $a_{ijn} \to a_{ij}$

2

a)

$A^n \to 0 \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1 \; \forall i \in \{1, ..., e\}$

b)

$\sum\limits_0^\infty A^n$ konvergent $\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1 \; \forall i \in \{1, ..., e\}$
$\sum\limits_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ konvergent $\forall A \in M_d(\mathbb{C})$

3

$det\ e^A = e^{spur A} \neq 0$, exp: $M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ ist surjektiv $\Rightarrow$ alle Matrizen aus $GL_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ sind Werte der Exponentialreihe

4

z.B. $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $A = e^B$
A nicht diagonalisierbar $\Rightarrow$ B nicht diagonalisierbar
Deshalb muss B ein Jordankästchen $\begin{pmatrix} \pi i & 1 \\ 0 & \pi i \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -\pi i & 1 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix}$ haben
$\Rightarrow$ B reell nicht realisierbar

5

$det\ e^A = e^{spur A}$

6

DGL $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ autonom $:\Leftrightarrow$ f von x unabhängig.

7

a)

$M = \left\{e^{tA};\ t \in \mathbb{R}\right\}$ ist kommutative Gruppe, da wegen der Vertauschbarkeit $t_1 A \cdot t_2 A = t_1 t_2 \cdot A^2 = t_2 A \cdot t_1 A$ gilt: $e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A} = e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_2 A} \cdot e^{t_1 A}$

b)

M besteht aus nur einem Element ($\mathbb{1}$) , falls A die Nullmatrix ist.

c)

z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow\ e^{tA} = \begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$

d)

z.B. $A = \mathbb{1}\ \Rightarrow\ e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

8

$exp:\ t \to e^{tA}$ ist unendlich oft differenzierbar mit $e^{tA} = A \cdot e^{tA}$

9

Die lineare DGL $\frac{dy}{dt} = Ay$ habe ein Fundamentalsystem $\Phi \in M_d(\mathbb{R})$.
1) Im Allgemeinen $\Phi = e^{tA}$
2) Ist A diagonalisierbar mit EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_d$
$\Rightarrow\ \Phi = (e^{\lambda_i t} \cdot v_i)_{i=1\ldots d}$

10

a)

Lösung stabil $\Leftrightarrow$ alle EW negativ

b)

DGL besitzt sowohl nichtkonstante beschränkte als auch unbeschränkte Lösungen, wenn A negative und positive EW hat.

11

4 Typen Jordanscher Normalformen für reelle zweireihige Matrizen:
1)$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 2)$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 3)$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 4)$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$

12

Spiral-Expansion $\Leftrightarrow$ A hat Jordansche Normalform $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, wobei $\alpha > 0$
$\Rightarrow$ A hat komplex konjugierte EW mit positivem Realteil.

13

Jede andere Lösung ist Linearkombination der beiden gegebenen $\Rightarrow$ stabil (also beschränkt) nur, wenn Vielfaches der gegebenen stabilen Lösung, d.h. es gibt nur *eine* stabile Lösung.

14

$f : V \times W \to U$ bilinear, wenn linear in jeder Variablen.

15

(1) Ja, da linear in beiden Argumenten
(2) Nein, da nicht linear im ersten Argument
(3) Ja, da linear in beiden Argumenten
(4) Ja, da linear auch im ersten Argument (V ist $\mathbb{R}-$Vektorraum)
(5) Ja, da linear in beiden Argumenten
(6) Ja, falls $U = \mathbb{C}$
(7) Ja, falls $U = \mathbb{C}$
(8) Nein, falls $U = \mathbb{C}$, da nicht linear im zweiten Argument

16

a)

Sei $W = (w_1, \dots, w_d)$ Basis von V
$B := (b_{ij})_{i,j=1\dots d}$ mit $b_{ij} = b(w_i, w_j) \Rightarrow b(x,y) = x^t \cdot B \cdot y$

b)

Sei T Übergangsmatrix zwischen zwei Basen $\Rightarrow B' = T^t \cdot B \cdot T$

c)

b symmetrisch $\Leftrightarrow b(x,y) = b(y,x)\ \forall\, x,y \in V$
b antisymmetrisch $\Leftrightarrow b(x,y) = -b(y,x)\ \forall\, x,y \in V$

d)

B nichtausgeartet $:\Leftrightarrow$ $Kern\ B = 0$, d.h. $detB \neq 0$

17

$f_{sym}(x,y) := \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2}$ symmetrisch und
$f_{antisym}(x,y) := \frac{f(x,y)-f(y,x)}{2}$ antisymmetrisch
$\Rightarrow f = f_{sym} + f_{antisym}$

18

a)

Basis $v_1, \ldots, v_d$ von $\mathbb{R}^d$ heißt symplektisch, wenn $b(v_i, v_j) = 0 \,\forall\, i, j = 1, \ldots, d$

b)

Bzgl. einer symplektischen Basis wird jede antisymmetrische Bilinearform durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben (Normalform).

c)

Die quadratische Form $q(x) := b(x,x)$ bestimmt die symmetrische Bilinearform $b(x,y)$ eindeutig, da gilt: $b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$

19

a)

z.B. $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

b)

Nein, da Determinante der Normalform stets positiv ist.

20

Normalform einer quadratischen Form auf $\mathbb{C}^d$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

21

a)

Die Signatur einer reellen quadratischen Form q ist daz Zahlenpaar (r_+, r_-), wobei r_+ die Anzahl der positiven, r_- die Anzahl der negativen Diagonaleinträge in der Normalform von q ist.

b)

Quadratische Form $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$ q hat die Signatur $(n, 0)$.

c)

Normalform einer quadratischen Form auf $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

d)

Die Signatur einer quadratischen Form ist unabhängig vom Koordinatensystem.

22

$H_f(v) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(v) \right)_{i,j=1,\dots,n}$

23

Minimum: $\nabla f(a) = 0 \ \wedge \ H_f(a)$ positiv definit.

24

Maximum: $\nabla f(a) = 0 \ \wedge \ H_f(a)$ negativ definit.

25

Eine reelle Quadrik Q ist die Menge der Lösungen einer quadratischen Gleichung
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i0}x_i + a_{00} = 0$
$A := (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ beschreibende Matrix des quadratischen Teils.
$\widetilde{A} := (a_{ij})_{i,j=0\ldots n}$ erweiterte symmetrische Matrix.
$\widetilde{x} := (1,x)^t \ \Rightarrow \ Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \widetilde{x}^t\widetilde{A}\widetilde{x} = 0\right\}$

26

a)

Quadratischer Kegel $\Leftrightarrow \ rg\widetilde{A} = rgA$

b)

Mittelpunktsquadrik $\Leftrightarrow \ rg\widetilde{A} = rgA + 1$

c)

Parabolische Quadrik $\Leftrightarrow \ rg\widetilde{A} = rgA + 2$

27

Q nichtentartet $\Leftrightarrow$ erweiterte Matrix $\widetilde{A}$ invertierbar.

28

Kegelschnitte = reelle Quadriken in $\mathbb{R}^2$.

29

Sei L eine Gerade und $A, B \notin L$ beliebige Punkte auf der Ebene.

a)

Ellipse: $Q = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A) + d(P,B) = const.\right\}$

b)

Hyperbel: $Q = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P,A) - d(P,B)| = const.\right\}$

c)

Parabel: $Q = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,A) = d(P,L)\right\}$

30

a)

$\emptyset$ (leere Menge), Ellipse, Hyperbel, Parabel.

b)

(1) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Sign(A) = (2,0), Sign(\widetilde{A}) = (3,0) \Rightarrow \emptyset$

(2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det\,\widetilde{A} = 0 \Rightarrow$ entartet.

(3) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Sign(A) = (1,0), Sign(\widetilde{A}) = (2,1) \Rightarrow$ Parabel

(4) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Sign(A) = (1,1), Sign(\widetilde{A}) = (2,1) \Rightarrow$ Hyperbel

31

a)

(Elliptisches) Paraboloid, Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid, einschaliges Hyperboloid (Regelfläche), hyperboloidisches Paraboloid (Sattelfläche).

b)

Regelfläche, Sattelfläche.

c)

Genau 2.

d)

Suche nach Schnittmenge mit der Tangentialebene.

e)

Geraden nur teilweise enthalten in der Quadrik im Gegensatz zu c).

32

a)

Bestimmung der Tangentialebene:
Tangente als Verbindungslinie von zwei benachbarten Punkten der Quadrik.
Gleichung der Tangentialhyperebene im Punkt $\widetilde{x}$: $\widetilde{x}^t \widetilde{A} \widetilde{\varepsilon} = 0$

b)

$\widetilde{x} = (1, x)^t$

33

a)

(Elliptisches) Paraboloid, Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid.

b)

Paraboloid: Drehung einer Parabel um ihre Symmetrieachse.
Ellipsoid: Drehung einer Ellipse um die Verbindungsgerade der Brennpunkte.
Zweischaliges Hyperboloid: Drehung einer Hyperbel um die Verbindungsgerade der Brennpunkte.

c)

(1) Enthält Geraden als Sattelfläche.
(2) Enthält keine Geraden als Kegel.
(3) Enthält Geraden als Regelfläche.
(4) Enthält keine Geraden als zweischaliges Hyperboloid.
(5) Enthält keine Geraden als Ellipsoid.

d)

Paralleles Ebenenpaar, zweischaliges Hyperboloid.

34

a)

Sei V ein $\mathbb{C}-$Vektorraum. $h : V \times V \to \mathbb{C}$ hermitsch $\Leftrightarrow$ linear im ersten Argument und antilinear im zweiten.

b)

h nichtausgeartet $\Leftrightarrow$ $(h(x, y) = 0 \, \forall x \in V \Rightarrow y = 0)$

c)

h positiv definit $\Leftrightarrow h(x, x) > 0 \, \forall \, x \neq 0$

d)

h indefinit $\Leftrightarrow$ weder h noch $-h$ ist positiv definit.

e)

Durch geeignete Basiswahl lässt sich jede hermitsche Form durch eine Matrix mit Diagonaleinträgen 1 (Anzahl : r_+), -1 (Anzahl : r_-) und 0 darstellen.
Trägheitssatz: r_+ und r_- sind eindeutig.

35

$H \in M_n(\mathbb{C})$ hermitesch $\Leftrightarrow$ $H^t = \overline{H}$.

36

a)

Ein $\mathbb{C}-$Vektorraum V mit einer positiv definiten hermiteschen Form h heißt ein unitärer Raum.

b)

(1) Unitärer Raum, da linear im ersten Argument und antilinear im zweiten.
(2) Kein unitärer Raum, da nicht antilinear im zweiten.
(3) Unitärer Raum, da linear im ersten Argument und antilinear im zweiten.
(4) Unitärer Raum, da linear im ersten Argument und antilinear im zweiten.
(5) Unitärer Raum, da linear im ersten Argument und antilinear im zweiten.

37

$x \to Ax$ ist Isometrie (längentreue Abbildung) $\Leftrightarrow$ $\overline{A}^t \cdot A = \mathbb{1}$, d.h. A unitär.

38

$A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt unitär, wenn $\overline{A}^t \cdot A = \mathbb{1}$.

39

a)

$\left\{e^{i\phi},\ \phi \in \mathbb{R}\right\}$ = komplexe Zahlen mit Betrag 1.

b)

z.B. $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

40

Orthonormale Zeilen $\Leftrightarrow$ $A \cdot \overline{A}^t = \mathbb{1} \Leftrightarrow \overline{A}^t \cdot A = \mathbb{1} \Leftrightarrow$ orthonormale Spalten.

41

a)

<u>Def.</u> $\mathbb{I} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\mathbb{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Quaternionenvektorraum $\mathbb{H}$:

$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) | \ A = x_0 \cdot \mathbb{1} + x_1 \cdot \mathbb{I} + x_2 \cdot \mathbb{J} + x_3 \cdot \mathbb{K} \,;\ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \right\}$

Reine Quaternionen (Unterraum): $\mathbb{H}_0 := \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) | \ A = x_1 \cdot \mathbb{I} + x_2 \cdot \mathbb{J} + x_3 \cdot \mathbb{K} \,;\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

b)

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{H}$ hat die Dimension 4.

c)

$\mathbb{H}$ ist ein Ring, aber kein Körper, da Multiplikation nicht kommutativ.
Multiplikationsregeln:
1) $\mathbb{I}^2 = \mathbb{J}^2 = \mathbb{K}^2 = -\mathbb{1}$
2) $\mathbb{I} \cdot \mathbb{J} = \mathbb{K} = -\mathbb{J} \cdot \mathbb{I}$
3) $\mathbb{J} \cdot \mathbb{K} = \mathbb{I} = -\mathbb{K} \cdot \mathbb{J}$
4) $\mathbb{K} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{J} = -\mathbb{I} \cdot \mathbb{K}$

42

Jedes Quaternion $Q = x_0 \cdot \mathbb{1} + x_1 \cdot \mathbb{I} + x_2 \cdot \mathbb{J} + x_3 \cdot \mathbb{K} \in \mathbb{H}$ mit $det(Q) = 1$, $|x_0| \neq 1$ hat die Gestalt

$$Q = e^{\alpha P} = cos\alpha + (sin\alpha)P$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $P = (det(Q - x_0\mathbb{1}))^{-1/2} \cdot (Q - x_0\mathbb{1}) \in \mathbb{H}_0$. Dann stellt die Abbildung

$$\Phi_Q : H_0 \to H_0,\ X \mapsto QXQ^{-1}$$

eine Drehung in $\mathbb{H}_0$ um die Achse $\overline{0P}$ mit dem Winkel 2α dar.

Anmerkung

Wie immer wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Richtigkeit und Vollständigkeit der Angaben nicht gewährleistet werden kann. Bei Fehlermeldungen: pankrat_nbg at yahoo.de