

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Aufgabe 10.1:

Für die folgenden Funktionen bestimme alle lokalen und absoluten Extrema sowie die maximalen Intervalle, in denen sie konvex oder konkav sind. Skizziere den Graphen der Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$

(b) $g(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(c) $h(x) = x - \arctan x$

Aufgabe 10.2:

Zeige:

(a) $e^x > 1 + x$ für alle $x \neq 0$

(b) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ für alle $x > 0$

Aufgabe 10.3:

Zeige: Eine im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y \in I$$

Hinweis: Folgern Sie aus obiger Ungleichung die Jensensche Ungleichung

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

Aufgabe 10.4:

Berechne

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(c) $\lim_{x \searrow 0} x^x$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

*Bitte auf den Abgaben Namen und Übungsgruppe angeben. Zweierabgaben erwünscht.
Keine Dreierabgabe! Keine Abgabe von Kopien!*