

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Aufgabe 8.1:

Sei n eine natürliche Zahl ≥ 2 . Zeige:

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ ist nicht gleichmäßig stetig auf \mathbb{R}_+
- (b) die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist gleichmäßig stetig auf \mathbb{R}_+

Aufgabe 8.2:

Zeige:

- (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$
- (b) $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1, \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
 $\cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$
 $\cos(5x) = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$
 $\cos(6x) = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1$

Aufgabe 8.3:

Der hyperbolische Sinus, bzw. Cosinus ist definiert als

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \sinh(x) &= \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \\ \cosh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \cosh(x) &= \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) \end{aligned}$$

Zeige:

- (a) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$
- (b) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$
- (c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- (d) \cosh und \sinh sind differenzierbar und berechne ihre Ableitungen.

Aufgabe 8.4:

Bestimme den Definitionsbereich der folgenden Funktionen, begründe, daß sie dort differenzierbar sind und berechne ihre Ableitung.

- (a) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$
- (b) $g(x) = \ln(\cos x)$
- (c) $h(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$
- (d) $k(x) = \sin^3(5x) \cdot \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$

*Bitte auf den Abgaben Namen und Übungsgruppe angeben. Zweierabgaben erwünscht.
Keine Dreierabgabe! Keine Abgabe von Kopien!*