MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG

A. Deinlein
deinlein@mi.uni-erlangen.de

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Aufgabe 7.1:

Bestimme die Konvergenzbereiche der Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right)$

Aufgabe 7.2:

Zeige: Die Funktionenfolgen

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$

(b) $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$

konvergieren gegen die unstetige Funktion $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. Sie können also nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergieren. Sie konvergieren aber gleichmäßig auf $K = \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 7.3:

Zeige: Die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ konvergiert gegen die stetige Funktion 0. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig auf dem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$, sie ist aber gleichmäßig auf $K = \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 7.4:

Zeige: Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto a^x$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend. In beiden Fällen wird $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ abgebildet. Die Umkehrfunktion ${}^a\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (der Logarithmus zur Basis a) ist stetig und es gilt

$$ {}^a\log x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*. $$

Bitte auf den Abgaben Namen und Übungsgruppe angeben. Zweierabgaben erwünscht. Keine Dreierabgabe! Keine Abgabe von Kopien!