MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG

A. Deinlein
deinlein@mi.uni-erlangen.de

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Aufgabe 6.1:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Der Limes superior von (a_n) ist definiert als

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \sup\{\text{Häufungspunkte von } (a_n)\}.$$

Zeige

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\})$

Aufgabe 6.2:

Man entscheide, welche der Funktionenfolgen (f_n) auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichmäßig konvergieren, wenn $f_n(x)$ gegeben ist durch

(a) $\sqrt[n]{x}$ (b) $\dfrac{1}{1+nx}$ (c) $\dfrac{x}{1+nx}$

Aufgabe 6.3:

Bestimme die Konvergenzbereiche sowie die Bereiche absoluter Konvergenz der folgenden Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\ x^n}$

Aufgabe 6.4:

Man bestimme alle stetigen Funktionen, die der folgenden Funktionalgleichung genügen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(b) $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit $g(xy) = g(x) + g(y)$

Bitte auf den Abgaben Namen und Übungsgruppe angeben. Zweierabgaben erwünscht. Keine Dreierabgabe! Keine Abgabe von Kopien!