MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG

A. Deinlein
deinlein@mi.uni-erlangen.de

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Aufgabe 5.1:

Seien A und B nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und

Tippfehler korrigiert

$$A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}, \ A \cdot B := \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\}$$

Zeige: $A + B$ und $A \cdot B$ sind beschränkt und es gilt

(a) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

(b) sind $A, B \subset \mathbb{R}_+$, so ist $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$, $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

Aufgabe 5.2:

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ (siehe Fußnote [1]). Zeige:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$

(ii) Ist $\lambda > 0$, so ist $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \infty$. Ist $\lambda < 0$, so ist $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = -\infty$

(iii) Ist $b > 0$, so ist $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$. Ist $b < 0$, so ist $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Aufgabe 5.3:

Zeige durch Nachprüfen der $\epsilon - \delta-$Eigenschaft die Stetigkeit folgender Funktionen:

(a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

(b) $f : \begin{cases} (0, \infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

Aufgabe 5.4:

Bestimme den maximalen Definitionsbereich D, sodass die Funktion

(i) $f(x) = \dfrac{1 + x^3}{1 + x}$

(ii) $g(x) = \dfrac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4}$

auf D stetig fortgesetzt werden kann und beweisen Sie die Stetigkeit bzw. Unstetigkeit.

Bitte auf den Abgaben Namen und Übungsgruppe angeben.

[1] Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelller Zahlen heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt: $a_n > K$ (bzw. $a_n < K$) $\quad \forall n \geq N$.
Bezeichnung: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).