

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Aufgabe 4.1:

Zeige:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert.
- (b) Sei $b \neq -1$. Die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} (a^n b^{n-1} + a^n b^n)$ konvergiert für $|ab| < 1$ und divergiert für $|ab| \geq 1$ $b \neq -1$. ergänzte
Bedingung
 $b \neq -1$

Aufgabe 4.2:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Zeige: Äquivalent sind

- (i) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.
- (ii) Die *verdichtete* Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ ist konvergent.

Aufgabe 4.3:

Sei $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und sei $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\log(xy) = \log x + \log y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Zeige:

- (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ divergent,
- (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ konvergent.

Aufgabe 4.4:

Zeige:

- (a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} ist abzählbar.
- (b) Die Menge aller Teilmengen von \mathbb{N} ist überabzählbar.

*Bitte auf den Abgaben Namen und Übungsgruppe angeben. Zweierabgaben erwünscht.
Keine Dreierabgaben! Keine Abgabe von Kopien!*