

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΝ



ΓΚΥΖΗ 14 - ΑΘΗΝΑ ☎ 64.52.777
64.52.749



ΕΤΑΝΑΛΗΨΗ
ΒΑΣΙΚΩΝ
ΕΝΝΟΙΩΝ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΑΚΑΡΙΚΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

1) ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τα σύνολα των αριθμών είναι τα εξής :

- 1) Οι φυσικοί αριθμοί : $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 - 2) Οι ακέραιοι αριθμοί : $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 - 3) Οι ρητοί αριθμοί : $Q = \left\{ \rho / \rho = \frac{\kappa}{\nu}, \kappa \in Z, \nu \in Z, \nu \neq 0 \right\}$
 - 4) Οι άρρητοι αριθμοί : $Q' = \{\text{οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί}\}$
π.χ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\pi=3,14\dots$
 - 5) Οι πραγματικοί αριθμοί : $\mathbb{R} = Q \cup Q'$
- Τα διαστήματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών , ορίζονται ως εξής :
 - i) Κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ είναι το σύνολο των αριθμών x με $a \leq x \leq \beta$
 - ii) Ανοικτό διάστημα (a, β) είναι το σύνολο των αριθμών x με $a < x < \beta$
 - iii) Το ανοικτό δεξιά διάστημα $[a, \beta)$ είναι το σύνολο των αριθμών x με $a \leq x < \beta$
 - iv) Το ανοικτό αριστερά διάστημα $(a, \beta]$ είναι το σύνολο των αριθμών x με $a < x \leq \beta$
 - v) Διάστημα $(a, +\infty)$ ή $[a, +\infty)$ είναι το σύνολο των αριθμών x με $x > a$ ή $x \geq a$ αντίστοιχα .
 - vi) Διάστημα $(-\infty, a)$ ή $(-\infty, a]$ είναι το σύνολο των αριθμών x με $x < a$ ή $x \leq a$ αντίστοιχα .

2) ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Αναλογία λέγεται κάθε ισότητα κλασμάτων και έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες :

- 1) $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$
- 2) $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{a}$
- 3) $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$
- 4) $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{a - \beta}{a + \beta} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta}$
- 5) $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a + \gamma}{\beta + \delta}$

3) ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες των δυνάμεων :

- Αν a πραγματικός αριθμός και n φυσικός, τότε ορίζουμε :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}} \quad (n \geq 2) \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

- i) Αν n περιττός, τότε : $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$
 ii) Αν n άρτιος, τότε : $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$ ή $a = -b$

- Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

$$1) a^k \cdot a^l = a^{k+l} \quad 3) a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k \quad 5) (a^k)^l = a^{k \cdot l}$$

$$2) \frac{a^k}{a^l} = a^{k-l} \quad 4) \frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b} \right)^k$$

4) ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Είναι γνωστές οι παρακάτω ταυτότητες :

- 1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 3) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- 4) $(a+b+\gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2a\gamma + 2b\gamma$
- 5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 6) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- 7) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- 8) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- 9) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- 10) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

5) ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ $\Re$

Για δύο πραγματικούς αριθμούς a, b ορίζουμε :

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \quad \text{και} \quad a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Για τις ανισότητες έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες :

- 1) Αν $a > 0$ και $b > 0$, τότε $a+b > 0$
- 2) Αν $a < 0$ και $b < 0$, τότε $a+b < 0$

- 3) Αν α, β ομόσημοι , τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$
- 4) Αν α, β ετερόσημοι , τότε $\alpha \cdot \beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$
- 5) Για κάθε αριθμό α ισχύει : $\alpha^2 \geq 0$ ($\alpha^2 = 0$ μόνο όταν $\alpha = 0$)
- 6) Μεταβατική ιδιότητα : αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$
- 7) Πρόσθεση – Αφαίρεση στα μέλη μιας ανισότητας : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$
- 8) Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση στα μέλη μιας ανισότητας :
- i) Αν $\gamma > 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
- ii) Αν $\gamma < 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$, $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
- 9) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- 10) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ και $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$
- Προσοχή :** Δεν μπορούμε να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη !!!
- 11) Αν $\alpha, \beta > 0$ και n φυσικός $\neq 0$ ισχύει : $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$ και $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$
- 12) Αν α, β ομόσημοι , τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

6) ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

- Ορισμός : $|a| = \begin{cases} a & , \text{αν } a \geq 0 \\ -a & , \text{αν } a < 0 \end{cases}$
- Οι ιδιότητες των απολύτων τιμών είναι οι εξής :
 - $|a| \geq 0$
 - $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$
 - $|a|^2 = a^2$. Γενικότερα ισχύει : $|a|^{2v} = a^{2v}$ και $|a|^{2v+1} = \begin{cases} a^{2v+1} & , \text{αν } a \geq 0 \\ -a^{2v+1} & , \text{αν } a < 0 \end{cases}$
 - Αν $\theta > 0$, τότε : $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
 - $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$
 - Αν $\theta > 0$, τότε : $\begin{cases} |x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta \\ |x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta \end{cases}$
- Για το άθροισμα , το γινόμενο και το πηλίκο δύο πραγματικών αριθμών ισχύουν οι εξής ιδιότητες :
 - $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
 - $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
 - $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
 - $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$

7) ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Απόσταση δύο αριθμών α, β ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που περικλείεται από τους αριθμούς α, β στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ ή με $d(\beta, \alpha)$, δηλαδή ισχύει:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

8) ΡΙΖΕΣ

- Ορισμοί: $\sqrt[n]{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = a$, $\sqrt[n]{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = a$ ($a, \beta \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$)
- Για τις ρίζες ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
 - 1) Αν $a \geq 0$ τότε: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$
 - Αν ο n είναι άρτιος, τότε η $\sqrt[n]{a^n}$ ορίζεται για κάθε a και είναι $\sqrt[n]{a^n} = |a|$
π.χ. $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$
 - Αν ο n είναι περιττός, τότε η $\sqrt[n]{a^n}$ ορίζεται μόνο για $a \geq 0$ και είναι $\sqrt[n]{a^n} = a$
π.χ. $\sqrt[5]{3^5} = 3$
 - 2) Αν $a, \beta \geq 0$ τότε: i) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a \cdot \beta}$ ii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{a}{\beta}}$ ($\beta \neq 0$)
 - 3) Αν $a > \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{\beta}$
 - 4) Αν $a, \beta \geq 0$ και κ θετικός ακέραιος, τότε: i) $\sqrt[n]{a^\kappa} = (\sqrt[n]{a})^\kappa$ ii) $\sqrt[n]{a^n \cdot \beta} = a \cdot \sqrt[n]{\beta}$
 - 5) Αν $a \geq 0$ τότε: i) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ ii) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{m \cdot p}}} = \sqrt[n]{a^m}$
 - 6) Αν $a > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $a^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{a^\mu}$
Επιπλέον, αν μ, n θετικοί ακέραιοι ορίζουμε: $0^{\frac{\mu}{n}} = 0$

9) ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

- Ορισμός: $\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$
- Για τους λογάριθμους ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
 - 1) $\log_a a^x = x$ 2) $a^{\log_a \theta} = \theta$ 3) $\log_a 1 = 0$ 4) $\log_a a = 1$
 - 5) $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$ 6) $\log_a (\theta_1 : \theta_2) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$
 - 7) $\log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$ 8) $\log_a \sqrt[\kappa]{x} = \frac{1}{\kappa} \log_a x$
 - 9) Τύπος αλλαγής βάσης: $\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Έχουν τη μορφή : $ax + \beta = 0$ και η διερεύνησή τους είναι η εξής :

- Αν $a \neq 0$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση την : $ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$
- Αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη (δηλαδή δεν έχει λύση) .
- Αν $a = 0$ και $\beta = 0$, η εξίσωση είναι ταυτότητα ή αόριστη (δηλαδή αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x) .

➤ Αν η εξίσωση δίνεται σε άλλη μορφή τότε την ανάγουμε στη μορφή $ax + \beta = 0$ με απαλοιφή παρονομαστών - εκτέλεση πράξεων - χωρισμό γνωστών από αγνώστους ή αναγωγή ομοίων όρων .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $9(8-x) - 10(9-x) - 4(x-1) = 1 - 8x \Leftrightarrow 72 - 9x - 90 + 10x - 4x + 4 = 1 - 8x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -9x + 10x - 4x + 8x = -72 + 90 - 4 + 1 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{5} \Leftrightarrow x = 3$$

2) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-6}{x+2} = 2$ Πρέπει : $(x-1) \cdot (x+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 & \text{και} \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 & \text{και} \\ x \neq -2 \end{cases}$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-6}{x+2} = 2 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x+2) \cdot \frac{x+1}{x-1} + (x-1) \cdot (x+2) \cdot \frac{x-6}{x+2} = 2(x-1) \cdot (x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot (x+1) + (x-1) \cdot (x-6) = 2(x-1) \cdot (x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 2x + 2 + x^2 - 6x - x + 6 = 2(x^2 + 2x - x - 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 8 = 2x^2 + 4x - 2x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 8 = 2x - 4 \Leftrightarrow -4x - 2x = -4 - 8 \Leftrightarrow -6x = -12 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{6} \Leftrightarrow x = 2$$

2) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι : $|f(x)| = a$ (1) ή $|f(x)| = |g(x)|$ (2) ή εξισώσεις με δύο απόλυτα αλλά όχι της μορφής $|f(x)| = |g(x)|$ ή με περισσότερα από δύο απόλυτα .

➤ Για τη λύση της (1) έχουμε : $\begin{cases} \text{Αν } a < 0, \text{ τότε η (1) είναι αδύνατη} \\ \text{Αν } a \geq 0, \text{ τότε : (1) } \Leftrightarrow f(x) = a \text{ ή } f(x) = -a \dots \end{cases}$

Για τη λύση της (2) έχουμε : $(2) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ ή } f(x) = -g(x)$

Για τις εξισώσεις που έχουν δύο απόλυτα αλλά δεν είναι της μορφής $|f(x)|=|g(x)|$ ή που έχουν περισσότερα από δύο απόλυτα συντάσσουμε πίνακα προσήμου των απολύτων και εξετάζοντας κάθε διάστημα χωριστά βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$$1) |x-1| = |2x+3| \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2x+3 \\ x-1 = -2x-3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x-2x = 3+1 \\ x+2x = -3+1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 4 \\ 3x = -2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$2) |x+2| - 2|x-1| = 1$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$

i) Αν $x \in (-\infty, -2)$ η εξίσωση γράφεται :

$$-(x+2)+2(x-1)=1 \Leftrightarrow -x-2+2x-2=1 \Leftrightarrow x=5$$

που απορρίπτεται αφού $x \in (-\infty, -2)$

ii) Αν $x \in [-2, 1)$ η εξίσωση γράφεται : $(x+2)+$

$$+2(x-1)=1 \Leftrightarrow x+2+2x-2=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \quad (\text{δεκτή})$$

iii) Αν $x \in [1, +\infty)$ η εξίσωση γράφεται : $x+2-2x+2=1 \Leftrightarrow x=3$ (δεκτή)

3) ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Έχουν τη μορφή : $ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$ και για τη λύση τους έχουμε :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$
αν $\Delta > 0$	έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
αν $\Delta = 0$	έχει μία ρίζα διπλή την $x_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha}$
αν $\Delta < 0$	δεν έχει πραγματικές ρίζες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$$1) x^2-3x+2=0 \text{ Είναι : } \Delta = 9-8=1 > 0, \text{ έχει δύο ρίζες τις } x_1 = \frac{-(-3) \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$2) x^2+10x+25=0 \text{ Είναι : } \Delta = 100-100=0, \text{ έχει μία ρίζα διπλή την } x_{1,2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$3) (x-2)^2+3x=2 \Leftrightarrow x^2-2x+4+3x-2=0 \Leftrightarrow x^2+x+2=0 \text{ Είναι : } \Delta = 1-8=-7 < 0, \text{ αδύνατη}$$

Σημείωση : Όταν $\beta=0$ ή $\gamma=0$, τότε η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ λύνεται πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρίνουσας.

- Αν $\gamma=0$, κάνουμε παραγοντοποίηση.

π.χ. $5x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(5x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $5x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{2}{5}$

- Αν $\beta=0$, λύνουμε την εξίσωση ως προς x^2

π.χ. $2x^2-8=0 \Leftrightarrow 2x^2=8 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x^2=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=\pm 2$

4) ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή: $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ και λύνονται με την αντικατάσταση: $x^2 = y$, $y \geq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Θέτουμε $x^2 = y$, $y \geq 0$. Οπότε η εξίσωση γίνεται: $y^2 - 5y + 4 = 0$ με

$\Delta = 25 - 16 = 9$ και $y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow y_1 = 4$ και $y_2 = 1$ (δεκτές)

Αντικαθιστώντας στον μετασχηματισμό, έχουμε: $\begin{cases} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1 \\ x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2 \end{cases}$

, οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ και $x_4 = -2$.

5) ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή: $x^v = a$ ($v \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$). Οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$a > 0$	v περιττός	έχει ακριβώς μια λύση: $x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}$
	v άρτιος	έχει ακριβώς δύο λύσεις: $x^v = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[v]{a}$
$a < 0$	v περιττός	έχει ακριβώς μια λύση: $x^v = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{-a}$
	v άρτιος	δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -2$

2) $x^6 = -3$ αδύνατη

3) $x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \\ x = \sqrt{1} \text{ ή } x = -\sqrt{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \\ x = \pm 1 \end{cases}$

4) $2x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \\ 2x^6 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \\ x^6 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \\ x = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \text{ ή } x = -\sqrt[6]{\frac{1}{2}} \end{cases}$

6) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ $n \geq 3$

Μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ≥ 3 λύνεται με τους εξής τρόπους :

► Με παραγοντοποίηση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $x^7 + x^4 - x^3 - 1 = 0$

$$x^7 + x^4 - x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4(x^3 + 1) - (x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 1)(x^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^3 + 1 = 0 \\ \text{ή } x^4 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^3 = -1 \\ \text{ή } x^4 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 \\ \text{ή } x = \pm 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 \\ \text{ή } x = 1 \end{array} \right\}$$

► Με σχήμα Horner

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

Οι διαιρέτες του σταθερού όρου της εξίσωσης είναι : $+1, -1$.

Για $x=1$ έχουμε : $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1 - 3 + 1 + 1 = 0$. Άρα το 1 είναι ρίζα. Οπότε :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & -1 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array} \quad \rho=1 \quad \text{Άρα : } x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ή } x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (\Delta=8) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ή } x = 1 + \sqrt{2} \\ \text{ή } x = 1 - \sqrt{2} \end{array} \right\}$$

► Αν η εξίσωση δίνεται σε άλλη μορφή (π.χ. κλασματική, άρρητη, τριγωνομετρική κ.τ.λ.) τότε την ανάγουμε σε πολυωνυμική με απαλοιφή παρονομαστών ή ύψωση στην κατάλληλη δύναμη ή θέτοντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό.

7) ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι εξισώσεις που περιέχουν μια τουλάχιστον ρίζα.

► Για τη λύση τους βάζουμε περιορισμούς, υψώνουμε διαδοχικά σε κατάλληλες δυνάμεις μέχρι να οδηγηθούμε σε εξίσωση, την οποία λύνουμε και προσδιορίζουμε τις ρίζες της. Τέλος ελέγχουμε αν οι ρίζες ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{2 + \sqrt{x+3}} = 2$

$$\text{Πρέπει : } \left. \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ 2 + \sqrt{x+3} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq -3 \\ \text{ισχύει πάντα ως άθροισμα θετικών} \end{array} \right\} \Rightarrow x \geq -3$$

$$\text{Οπότε : } \sqrt{2 + \sqrt{x+3}} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2 + \sqrt{x+3}} \right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x+3} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 4 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} \right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x+3 = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 3 \Leftrightarrow x = -1$$

που είναι δεκτή, αφού ικανοποιεί τον περιορισμό.

8) ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι :

- $a^{f(x)} = \beta^{g(x)}$. Γράφουμε το β σε δύναμη με βάση το a (αν γίνεται) ή λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$$1) 2^{x^2-3x} = 4^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{2(x-2)} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{2x-4} \Leftrightarrow x^2-3x = 2x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ή} \\ x=4 \end{cases}$$

$$2) 2^{2x-3} = 3^x \Leftrightarrow \log_2 2^{2x-3} = \log_2 3^x \Leftrightarrow 2x-3 = x \log_2 3 \Leftrightarrow 2x - x \log_2 3 = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(2 - \log_2 3) = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2 - \log_2 3}$$

- $f(a^x) = g(a^x)$. Θέτουμε $a^x = y > 0$ και καταλήγουμε σε απλή εξίσωση με άγνωστο το y .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x+1} + 3^x - 3^{x-1} = 128$

$$3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x+1} + 3^x - 3^{x-1} = 128 \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^x \cdot 3 + 3^x - \frac{3^x}{3} = 128 \Leftrightarrow 27 \cdot 3^x + 15 \cdot 3^x + 3^x - \frac{3^x}{3} = 128$$

$$\text{Θέτουμε } 3^x = y \text{ και έχουμε : } 27y + 15y + y - \frac{y}{3} = 128 \Leftrightarrow 43y - \frac{y}{3} = 128 \Leftrightarrow \frac{128}{3}y = 128 \Leftrightarrow y = 3$$

$$\text{Αντικαθιστούμε στο μετασχηματισμό και έχουμε : } 3^x = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1$$

- $f(a^x) = g(\beta^x)$. Δημιουργούμε τη δύναμη $\left(\frac{a}{\beta}\right)^x$, οπότε αναγόμεναι στη προηγούμενη μορφή .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}$

$$3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2^x}{2^4} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2} - 6 \cdot \frac{5^x}{5^3} \Leftrightarrow 2^x \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2} \right) = 5^x \left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^x = \frac{16}{625} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^x = \left(\frac{2}{5} \right)^4 \Leftrightarrow x = 4$$

9) ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε λογαριθμικές εξισώσεις βάζουμε περιορισμούς (λογαριθμίσιμες ποσότητες > 0) και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων γράφουμε συνήθως την εξίσωση στη μορφή $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ απ' όπου προκύπτει $f(x) = g(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\log_5(3x+2) - \log_5(x+1) = \log_5 2$

Πρέπει : $3x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$ και $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, οπότε τελικά : $x > -\frac{2}{3}$ και συνεπώς

$$\log_5(3x+2) - \log_5(x+1) = \log_5 2 \Leftrightarrow \log_5 \frac{3x+2}{x+1} = \log_5 2 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x+1} = 2 \Leftrightarrow 3x+2 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ δεκτή}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $(x+1)(x^2-4) = (x-2)(x+1)^2$

v) $2x - \left(\frac{15}{9}x - 5\right) = \frac{x-6}{3} + 7$

ii) $(x-1)^3 + 1 - x^2 = 0$

vi) $(x-2)^2 - x(x-4) = 1-x$

iii) $\frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3} = \frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2}$

vii) $x(\lambda^2+1)+3 = 4(\lambda-x)-\lambda^2x$

iv) $\frac{2x+1}{x^2-x} - \frac{1}{x} = \frac{x}{(x-1)^2}$

viii) $\lambda^2x = \lambda(x+2)-2$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $|3x-1| = 2|x+1|$

iii) $|x+4|+|x-2|-2|x| = 2$

v) $\frac{|x|+1}{|x|-x} = 3$

ii) $|x+2|+|x-2| = |3x-1|$

iv) $2|x+3|-5|x-1| = 0$

vi) $\frac{2x^2+|x|}{4|x|-3x^2} = \frac{5}{11}$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $2x^2-18 = 0$

v) $(3x-1)(2x+1) = 6$

ii) $x^2+3x = 0$

vi) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(3x-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{19}{16}$

iii) $2x^2-5x+4 = 0$

vii) $(2x-1)^2-3(2x-1) = 0$

iv) $x^2+x+3 = 0$

viii) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} = -\frac{1}{6}$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$

iii) $x^4+x^2-20 = 0$

ii) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2+1}{x} = \frac{89x}{72}$

iv) $18x^4-11x^2+1 = 0$

5) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x^4-27x = 0$

iii) $x^3 = 64$

v) $x^4 = -2$

ii) $3x^5+2x = 0$

iv) $x^5 = -32$

vi) $2x^3 = \frac{x}{2}$

6) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $6x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$

v) $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$

ii) $4x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 9x - 10 = 0$

vi) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

iii) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$

vii) $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$

iv) $3x^3 - 8x^2 - 16x + 16 = 0$

viii) $(2x+1)^6 + 9(2x+1)^3 + 8 = 0$

7) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\frac{3(x^2+1)}{2-x} + x = \frac{9}{2x^2-x^3} - 2$

iv) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x} = 1$

ii) $\frac{x^2+1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = 0$

v) $\sqrt[4]{8x^2-1} = 2x$

iii) $\sqrt[3]{x+3} = x-3$

vi) $2\eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x + 5\eta\mu x - 3 = 0$

8) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\sqrt{2x-1} = 3$

iv) $3 - 2\sqrt{2x+1} = 0$

vii) $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt{x}$

ii) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x-2}$

v) $\sqrt{5x-2} = 2\sqrt{1-x}$

viii) $\sqrt{\sqrt{x}-1} = 1$

iii) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x+2} = 0$

vi) $\sqrt{x} = x$

ix) $\sqrt{2-3x} = \lambda-1$

9) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $4^{x^2-5x+11} = 1024$

iv) $5^{1-x} - 2 \cdot 5^{-x} + 4 \cdot 5^{2-x} = 515$

ii) $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$

v) $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

iii) $7 \cdot 3^{2x-1} + 2 \cdot 9^{2x-3} = 207$

vi) $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$

10) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x \log 5 - \log(1+2^x) = x - \log 6$

iv) $\log_5(2^x + 6 \cdot 2^{-x}) = 1$

ii) $\log(2x-7) + \log(3x+4) = \log 16$

v) $\log(x+1) + 2 \log \sqrt{5x} = 2$

iii) $\log(4x-1) - 2 \log 2 = \log(x^2-1)$

vi) $3^{\log x} + 3^{2-\log x} = 10$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1) ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Έχουν τη μορφή : $ax+b > 0$ (1) ή $ax+b < 0$ και η διερεύνησή τους είναι η εξής :

- Αν $a > 0$ η (1) δίνει : $x > -\frac{\beta}{\alpha}$ (διαιρούμε με το $a > 0$)
- Αν $a < 0$ η (1) δίνει : $x < -\frac{\beta}{\alpha}$ (διαιρούμε με το $a < 0$)
- Αν $a = 0$ η (1) γράφεται : $0 < x > -\beta$ και
 - αληθεύει για κάθε τιμή του x , αν $\beta > 0$
 - είναι αδύνατη αν $\beta \leq 0$
- Ομοίως εργαζόμαστε και για την ανίσωση $ax+b < 0$
- Αν η ανίσωση δίνεται σε άλλη μορφή τότε την ανάγουμε στη μορφή $ax+b > 0$ (ή $ax+b < 0$) με εκτέλεση πράξεων - χωρισμό γνωστών από αγνώ-στους ή αναγωγή ομοίων όρων .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η ανίσωση : $4(y+1)^2 - (y+3)^2 < 3(y-2)^2$

$$\begin{aligned}
 4(y+1)^2 - (y+3)^2 < 3(y-2)^2 &\Leftrightarrow 4(y^2+2y+1) - (y^2+6y+9) < 3(y^2-4y+4) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 4y^2+8y+4 - y^2-6y-9 < 3y^2-12y+12 &\Leftrightarrow 3y^2+2y-5 < 3y^2-12y+12 \Leftrightarrow 14y < 17 \Leftrightarrow y < \frac{17}{14}
 \end{aligned}$$

2) ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι : $|f(x)| < a$ (1) ή $|f(x)| > a$ (2) ή $|f(x)| < |g(x)|$ (3) ή ανισώσεις με δύο απόλυτα αλλά όχι της μορφής $|f(x)| < |g(x)|$ ή με περισσότερα από δύο απόλυτα .

- Για τη λύση της (1) έχουμε :
- $$\begin{cases} \text{Αν } a \leq 0, \text{ τότε η (1) είναι αδύνατη} \\ \text{Αν } a > 0, \text{ τότε : (1) } \Leftrightarrow -a < f(x) < a \end{cases}$$

Για τη λύση της (2) έχουμε :

$$\begin{cases} \text{Αν } a < 0, \text{ τότε η (1) είναι ταυτότητα} \\ \text{Αν } a > 0, \text{ τότε : (1) } \Leftrightarrow f(x) > a \text{ ή } f(x) < -a \end{cases}$$

Για τη λύση της (3) έχουμε : $|f(x)|^2 < |g(x)|^2 \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow \dots$

Για τις ανισώσεις που έχουν δύο απόλυτα αλλά δεν είναι της μορφής $|f(x)| < |g(x)|$ ή που έχουν περισσότερα από δύο απόλυτα συντάσσουμε πίνακα προσήμου των απολύτων και εξετάζοντας κάθε διάστημα χωριστά συναληθεύουμε τις λύσεις . Τέλος η λύση της ανίσωσης είναι η ένωση των επιμέρους συναληθεύσεων .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -2+1 < x < 2+1 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

2) $|x+2| > 3 \Leftrightarrow x+2 < -3 \text{ ή } x+2 > 3 \Leftrightarrow x < -5 \text{ ή } x > 1$

3) $|2x+1| > 2|x+3| \Leftrightarrow |2x+1|^2 > 4|x+3|^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 > 4(x+3)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq 4(x^2 + 6x + 9) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq 4x^2 + 24x + 36 \Leftrightarrow -4x - 24x \leq 36 - 1 \Leftrightarrow -28x \leq 35 \Leftrightarrow x \geq -\frac{35}{28} \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{4}$

4) $-3|x+2| + |x-1| < x-3$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x+2	-	0	+	+
x-1	-	-	0	+

i) Αν $x \in (-\infty, -2)$ η ανίσωση γράφεται :

$$3(x+2) - (x-1) < x-3 \Leftrightarrow 3x+6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-x-x < -3-6-1 \Leftrightarrow x < -10, \text{ οπότε}$$

συναληθεύοντας παίρνουμε : $x \in (-\infty, -10)$

ii) Αν $x \in [-2, 1]$ η ανίσωση γράφεται :

$$-3(x+2) - (x-1) < x-3 \Leftrightarrow -3x-6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow -3x-x-x < -3+6-1 \Leftrightarrow -5x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}$$

, οπότε συναληθεύοντας παίρνουμε : $x \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right]$

iii) Αν $x \in (1, +\infty)$ η ανίσωση γράφεται :

$$-3(x+2) + (x-1) < x-3 \Leftrightarrow -3x-6+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x+x-x < -3+6+1 \Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$$

, οπότε συναληθεύοντας παίρνουμε : $x \in (1, +\infty)$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι : $x \in (-\infty, -10) \text{ ή } x \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right] \text{ ή } x \in (1, +\infty)$

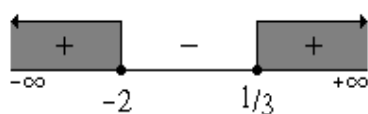
, δηλαδή τελικά : $x \in (-\infty, -10) \text{ ή } x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$

3) ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Το πρόσημο του τριωνόμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι :
αν $\Delta > 0$	ομόσημο του α εκτός των ριζών και ετερόσημο του α εντός των ριζών $\xleftarrow{\text{ομόσημο του } \alpha} \quad \quad \quad \text{ετερόσημο του } \alpha \quad \quad \quad \xrightarrow{\text{ομόσημο του } \alpha}$ $-\infty \quad \quad \quad x_1 \quad \quad \quad x_2 \quad \quad \quad +\infty$
αν $\Delta = 0$	ομόσημο του α για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\text{ρίζα}\}$
αν $\Delta < 0$	ομόσημο του α για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

1) $3x^2+5x-2 \geq 0$ Είναι : $\Delta = 25+24 = 49$ και $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}$ και $x_2 = -2$, οπότε :



$$\text{Άρα : } x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

2) $x^2+2x+1 > 0$ Είναι : $\Delta = 4-4 = 0$ και $x_{1,2} = \frac{-2}{2} = -1$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό (αφού $\alpha > 0$) για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Άρα τελικά $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ή $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

3) $x^2-2x+1 \leq 0$ Είναι : $\Delta = 4-4 = 0$ και $x_{1,2} = \frac{-(-2)}{2} = 1$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό (αφού $\alpha > 0$) για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Άρα η ανίσωση αληθεύει μόνο για $x = 1$, όπου ισχύει το ίσον.

4) ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ $n \geq 3$

► Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος, αναλύουμε σε γινόμενο το 1ο μέλος (με παραγοντοποίηση ή σχήμα Horner) και κάνουμε πίνακα προσήμου γινομένου. Τέλος βρίσκουμε τα κατάλληλα διαστήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η ανίσωση : $2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x \leq 0$

$$2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x \leq 0 \Leftrightarrow x(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1) \Leftrightarrow \text{με σχήμα Horner} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2-x+1)(2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x+1)(2x^2+x) \leq 0$$

• Για το τριώνυμο x^2-x+1 είναι : $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, οπότε επειδή $\alpha = 1 > 0$ ισχύει $x^2-x+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

• $2x+1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

• Τέλος : $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Οπότε κάνοντας τον πίνακα προσήμου γινομένου, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$		
$x-1$	-	-	-	0	+		
x^2-x+1	+	+	+	+	+		
$2x^2+x$	+	0	-	0	+		
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

Όπως φαίνεται και από τον διπλα-νό πίνακα η ανίσωση :

$$2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x \leq 0 \text{ αληθεύει όταν}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [0, 1].$$

5) ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Υπάρχουν δύο μορφές στις κλασματικές ανισώσεις :

- Της μορφής : $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ που γράφεται ισοδύναμα $A(x) \cdot B(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) < 0$ (όπου $B(x) \neq 0$) και αυτό γιατί το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 5x + 4} < 0$

Η ανίσωση γράφεται : $\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 5x + 4} < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10x + 21)(x^2 - 5x + 4) < 0$

- Για το τριώνυμο $x^2 - 10x + 21$ είναι : $\Delta = 100 - 84 = 16$, οπότε $x_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = 7$ και $x_2 = 3$
- Για το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ είναι : $\Delta = 25 - 16 = 9$, οπότε $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 4$ και $x_2 = 1$

Οπότε κάνοντας τον πίνακα προσήμου γινομένου , έχουμε :

x	$-\infty$	1	3	4	7	$+\infty$	
$x^2-10x+21$	+	+	⊖	-	-	⊖	+
x^2-5x+4	+	⊖	-	-	⊖	+	+
Γινόμενο	+	-	+	-	+	+	

Άρα τελικά :
 $x \in (1, 3) \cup (4, 7)$

- Της μορφής : $\frac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x)$ γράφεται : $\frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)] \cdot B(x) > 0$ και λύνεται όπως η προηγούμενη περίπτωση .

Δηλαδή μεταφέρουμε το $\Gamma(x)$ στο πρώτο μέλος τα κάνουμε ομώνυμα και αναγόμεστε σε γνωστή μορφή .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq \frac{8}{x^2-1}$

Η ανίσωση γράφεται : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq \frac{8}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) - 2(x-1) - 8}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2x + 2 - 8}{x^2 - 1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \leq 0$$

- Για το τριώνυμο x^2-x-6 είναι : $\Delta = 1+24 = 25$, οπότε $x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3$ και $x_2 = -2$
- $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ και $x_2 = -1$

Οπότε κάνοντας τον πίνακα προσήμου γινομένου , έχουμε :

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$	
x^2-x-6	+	○	-	-	-	○	+
x^2-1	+		+	○	-	○	+
Γινόμενο	+	○	-	○	+	○	-

Άρα τελικά :
 $x \in [-2, -1] \cup [1, 3]$
 $]$

6) ΑΡΡΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι ανισώσεις που περιέχουν μια τουλάχιστον ρίζα .

- Για τη λύση τους βάζουμε περιορισμούς , υψώνουμε διαδοχικά σε κατάλληλες δυνάμεις μέχρι να οδηγηθούμε σε ανίσωση , την οποία λύνουμε και προσδιορίζουμε τις ρίζες της . Τέλος κάνουμε συναλήθευση της λύσης με τους περιορισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{9-x} > \sqrt{x-5}$

Πρέπει : $\left. \begin{array}{l} 9-x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \leq 9 \\ x \geq 5 \end{array}$ Άρα : $5 \leq x \leq 9$ ή $x \in [5, 9]$. Οπότε :

$$\sqrt{9-x} > \sqrt{x-5} \Leftrightarrow (\sqrt{9-x})^2 > (\sqrt{x-5})^2 \Leftrightarrow 9-x > x-5 \Leftrightarrow 2x < 14 \Leftrightarrow x < 7$$

και κάνοντας συναλήθευση με τον περιορισμό έχουμε : $x \in [5, 7)$.

7) ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- Για την επίλυση των εκθετικών ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις εκθετικές εξισώσεις . Έτσι καταλήγουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής : $a^{f(x)} > a^{g(x)}$. Τότε αν :

- $a > 1$ έχουμε : $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- $0 < a < 1$ έχουμε : $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$$\begin{aligned} 1) \quad 2^{x^2-2x} < 8^{x-2} &\Leftrightarrow 2^{x^2-2x} < 2^{3(x-2)} \stackrel{2>1}{\Leftrightarrow} x^2-2x < 3(x-2) \Leftrightarrow x^2-2x < 3x-6 \Leftrightarrow x^2-2x-3x+6 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2-5x+6 < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3) \end{aligned}$$

$$2) \quad 3^{2x} + 3 \leq 28 \cdot 3^{x-1} \Leftrightarrow 3^{2x} - 28 \cdot \frac{3^x}{3} + 3 \leq 0 \quad . \quad \text{Θέτουμε} \quad 3^x = y > 0 \quad \text{και} \quad \text{έχουμε} : \\ y^2 - \frac{28}{3}y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 28y + 9 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 9 \Leftrightarrow 3^{-1} \leq 3^x \leq 3^2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

8) ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

► Για την επίλυση των λογαριθμικών ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις λογαριθμικές εξισώσεις. Έτσι καταλήγουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής : $\log_a f(x) > \log_a g(x)$. Τότε αν :

- $a > 1$ έχουμε : $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- $0 < a < 1$ έχουμε : $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\log_{1/5}(3^x + 2) \leq 2x \log_{1/5} 3$

Η ανίσωση γράφεται : $\log_{1/5}(3^x + 2) \leq \log_{1/5} 3^{2x} \Leftrightarrow 3^x + 2 \leq 3^{2x} \left(\text{αφού } 0 < \frac{1}{5} < 1 \right)$.

Θέτουμε $3^x = y > 0$, οπότε : $y + 2 \leq y^2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < y \leq 2$. Και τελικά :

$$0 < y \leq 2 \Leftrightarrow 0 < 3^x \leq 2 \Leftrightarrow 3^x \leq 2 \Leftrightarrow \log_3 3^x \leq \log_3 2 \Leftrightarrow x \log_3 3 \leq \log_3 2 \Leftrightarrow x \leq \log_3 2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$i) \quad \frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3} \geq 1 + \frac{x-3}{4}$$

$$iv) \quad \frac{x+5}{6} + 2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3} \right)$$

$$ii) \quad (x+2)^2 - (x-2)^2 < 0$$

$$v) \quad (2x+1)^3 + (2x-1)^3 > 16x^3 - 12$$

$$iii) \quad x - \frac{x-2}{2} > \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4}$$

$$vi) \quad \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{12} > \frac{x-3}{4} + 1$$

2) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$$i) \quad \begin{cases} \frac{x+5}{3} + \frac{2-x}{7} - \frac{x+1}{6} > 0 & \text{και} \\ \frac{2x-5}{4} - \frac{x}{3} < \frac{2-2x}{12} \end{cases}$$

$$ii) \quad \begin{cases} 27(x-1) + 7 \leq \frac{11}{2}x - 5(x-2) & \text{και} \\ (2x-1)^2 + (x+2)^2 \geq 5x(x-3) \end{cases}$$

3) Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & |3x-1| \leq \frac{1}{2} & \text{iv)} & 3|x-1|-2|x+1| \leq x & \text{vii)} & |3x+2| \geq 3|x-1| \\ \text{ii)} & \frac{5|x|-7}{2} - \frac{3|x|+1}{4} < |x|+5 & \text{v)} & 1 \leq |x-3| \leq 4 & \text{viii)} & \frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|} \geq 0 \\ \text{iii)} & 2|x|+3|x-1| > 5x-2 & \text{vi)} & ||x-1|-2| \leq 3 & \text{ix)} & |x^2-2x+1| \geq |x^2-1| \end{array}$$

4) Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & 2x^2+x-15 < 0 & \text{iv)} & x^2-x+5 \geq 0 & \text{vii)} & (x+1)^2 \geq 3(x+1) \\ \text{ii)} & x^2-25 < 0 & \text{v)} & x^2+4x+4 > 0 & \text{viii)} & 5x^2+3x-2 \geq 3x^2-2x+10 \\ \text{iii)} & x^2-7x \geq 0 & \text{vi)} & x^2-6x-16 \geq 0 & \text{ix)} & (2x-1)^2 \geq 3(2x-1) \end{array}$$

5) Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & x^3+2x-3 \geq 0 & \text{iv)} & x^3-3x^2-4x+12 \leq 0 & \text{vii)} & 2x^3+4x^2 \leq 3(x^2+5x+6) \\ \text{ii)} & x^4-5x^2+4 < 0 & \text{v)} & x^3+12x \geq 8x^2 & \text{viii)} & 4x^4+12x^3+3x^2-13x-6 < 0 \\ \text{iii)} & x^3+2x^2-5x-6 < 0 & \text{vi)} & x^3+3x > x^2+27 & \text{ix)} & 3x^3-5x^2+2x > 0 \end{array}$$

6) Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & \frac{2x-1}{5-x} < -1 & \text{iv)} & \frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3} < 1 & \text{vii)} & \frac{x+10}{x-5} - \frac{10}{x} > \frac{11}{6} \\ \text{ii)} & \frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} \leq 1 & \text{v)} & \frac{1}{x-1} > \frac{2}{3x+1} & \text{viii)} & \frac{1}{x^2+6x+5} \leq \frac{1}{x^2+3} \\ \text{iii)} & \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \leq 2 & \text{vi)} & \frac{5}{x+2} + \frac{1}{x+3} > \frac{7}{6} & \text{ix)} & \frac{1}{1-x^2} < \frac{2}{3x+1} \end{array}$$

7) Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & \sqrt{3-x} \geq \sqrt{x+1} & \text{iv)} & 2\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+2} < 0 & \text{vii)} & \sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} < 3 \\ \text{ii)} & \sqrt{2x+1} > x-1 & \text{v)} & \sqrt{7x-2} - \sqrt{5x-8} > 2 & \text{viii)} & \sqrt{4x^2+7x-2} > 2x+1 \\ \text{iii)} & \sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3} > 0 & \text{vi)} & \sqrt{x^2-2x+6} \geq 2x-3 & \text{ix)} & \sqrt{x+2} < 2+\sqrt{x-6} \end{array}$$

8) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $2^x \geq \frac{1}{16}$

iv) $2^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0$

vii) $4 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^x < 2$

ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-1} < \left(\frac{3}{2}\right)^x$

v) $(\sqrt{2}-1)^{x^4-5x^2+4} \geq 1$

viii) $8^x + 2^x < 20$

iii) $2^{x+3} + 2^{x+1} > 48 + 2^{x+2}$

vi) $27^x + 3^x > 5^x$

ix) $8^{4x-1} > (16\sqrt{2})^{2x+1}$

9) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $\log x^2 \geq \log^2 x$

iv) $x^{\log_2 x} > 8$

ii) $\log_2 \sqrt{x} < \sqrt{\log_2 x}$

v) $\log_3 x \cdot \log_9 x < 1$

iii) $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 > x \log 3 + \log 178$

vi) $\log_{1/2} [\log_3 (3x-1)] > 0$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1) Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$	$\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}, \eta\mu x \neq 0$	$1 + \epsilon\phi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}, \sigma\upsilon\nu x \neq 0$	$\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1$	$1 + \sigma\phi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$

2) Τριγωνομετρικοί αριθμοί 1ου τεταρτημορίου

x	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi x$	$\sigma\phi x$
0° (0 rad)	0	1	0	δεν ορίζεται
30° ($\pi/6$ rad)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45° ($\pi/4$ rad)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° ($\pi/3$ rad)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90° ($\pi/2$ rad)	1	0	δεν ορίζεται	0

3) Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x$	$\sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x$
$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi(\pi - x) = -\epsilon\phi x$	$\sigma\phi(\pi - x) = -\sigma\phi x$
$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi(\pi + x) = \epsilon\phi x$	$\sigma\phi(\pi + x) = \sigma\phi x$
$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$	$\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\phi x$	$\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \epsilon\phi x$
$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu x$	$\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sigma\phi x$	$\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\epsilon\phi x$

4) Τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}\eta\mu x &= \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta), \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ \sigma\upsilon\nu x &= \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ \epsilon\phi x &= \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ \sigma\phi x &= \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu 3x$

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu 3x &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \frac{2\pi}{3} = 2\kappa\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \quad \text{ή} \\ 5x + \frac{2\pi}{3} = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right), \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} \quad \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}\kappa\pi - \frac{\pi}{48} \quad \text{ή} \\ x = \kappa\pi - \frac{7\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{3} \epsilon\phi^2 x + 2 \epsilon\phi x - \sqrt{3} = 0$

Θέτουμε $\epsilon\phi x = y$ (1), οπότε η εξίσωση γράφεται : $\sqrt{3} y^2 + 2y - \sqrt{3} = 0$ (2)

Η (2) έχει διακρίνουσα $\Delta = 4 + 4\sqrt{3}\sqrt{3} = 16$ και ρίζες : $y_1 = \frac{-2+4}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $y_2 = \frac{-2-4}{2\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$. Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε :

- $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\epsilon\phi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

5) Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$
$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$
$\epsilon\phi(\alpha+\beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$	$\epsilon\phi(\alpha-\beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$

6) Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

$$\begin{aligned}\eta\mu 2\alpha &= 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha \\ \epsilon\phi 2\alpha &= \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}\end{aligned}$$

Προσοχή : Οι τύποι αυτοί εκφράζουν και τη σχέση ανάμεσα στο τόξο και στο μισό του .

$$\text{π.χ. } \eta\mu x = 2 \eta\mu \frac{x}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 7x = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{7x}{2}$$

6) Τύποι αποτετραγωνισμού

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

7) Τύποι μετασχηματισμού γινομένου σε άθροισμα

$$\begin{aligned}2 \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta &= \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) & 2 \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \\ 2 \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

8) Τύποι μετασχηματισμού αθροίσματος σε γινόμενο

$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$	$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$
$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$	$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = -2\eta\mu \frac{A-B}{2} \cdot \eta\mu \frac{A+B}{2}$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
$a_v = a_1 + (v-1) \omega$ $S_v = \frac{(a_1 + a_v) v}{2} = \frac{(a_1 + (v-1) \omega) v}{2}$	$a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$ $\text{Av } \lambda \neq 1 \Rightarrow S_v = a_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} \quad \text{Av } \lambda = 1 \Rightarrow S_v = v \cdot a_1$ $\text{Av } \lambda < 1 \Rightarrow S = \frac{a_1}{1 - \lambda}$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2}$
$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$
$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 = (S_1)^2 = \left[\frac{v(v+1)}{2} \right]^2$