

## Projeto de Pesquisa

**NÍVEL:** Iniciação Científica

**TÍTULO:** Cálculo Diferencial e Integral II com Software Mathematica

**ALUNO:** Renan Teixeira Carvalho

**INÍCIO:** 19 de março de 2009

**TÉRMINO:** 18 de março de 2010

**ORIENTADORA:** Prof. Dr. Osmar Aléssio

**DEPARTAMENTO:** Matemática, FEIS - UNESP

# 1 Resumo

Neste projeto, estudaremos tópicos de Cálculo Diferencial e Integral II com o auxílio do software Mathematica. O software Mathematica é um programa computacional desenvolvido na área da matemática que nos auxilia na resolução de vários problemas, como por exemplos: na resolução de cálculos numéricos, na apresentações de funções, na resolução de equações, no esboço e desenho de gráficos. Neste projeto, trabalharemos com atividades que exploram os conceitos que compõem o Cálculo Diferencial e Integral de funções de várias variáveis. Procuramos enfatizar a busca do significado dos conteúdos e as consequências dos resultados teóricos, ao mesmo tempo em que nos apoiamos na ferramenta computacional para os cálculos trabalhosos e para as visualizações.

## 2 Introdução e Justificativa

### 2.1 O Mathematica para o Cálculo 2

O software Mathematica pode ser utilizado no estudo dos tópicos de cálculo diferencial e integral II. Veja abaixo algumas das mais utilizadas funções que englobam conceitos de de cálculo diferencial e integral 2.

#### 2.1.1 Funções Vetoriais

Funções vetoriais são definidas em subconjuntos do  $R^n$  em  $R^m$ ,  $F : D \subset R^n \rightarrow R^m, X \rightarrow F(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$ .

Queremos dar importância nas definições de Imagem e Gráfico e Curvas de Nível de uma função vetorial.

Imagem de F  $Im(F) = \{(f_1(X), \dots, f_n(X)) \mid X \in D_F\}$ ,

Gráfico de F  $G(F) = \{(x_1, \dots, x_n, f_1(X), \dots, f_n(X)) \mid X \in D_F \text{ e } Y = F(X)\}$  e

Curva de Nível de F  $C : F^{-1}((k_1, \dots, k_m)) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid F(x_1, \dots, x_n) = (k_1, \dots, k_m)\}$ .

#### 2.1.2 Curvas e Superfícies obtidas pela imagem da função vetorial

**Curvas** Seja F uma função de uma variável real a valores em  $R^n$ .

$$\begin{array}{ccc} F : D \subset R & \longrightarrow & R^m, \\ x_1 & \longmapsto & F(x_1) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_1)) \end{array}$$

Se  $m = 2$  a imagem desta função é o traço de uma curva parametrizada planar, isto é,  $Im(F) = \{(f_1(x_1), f_2(x_1)) \mid x_1 \in D_F\}$ .

No software Mathematica

$ParametricPlot[\{f_1(x_1), f_2(x_1)\}, \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}]$

Se  $m = 3$  a imagem desta função é o traço de uma curva parametrizada espacial, isto é,  $Im(F) = \{(f_1(x_1), f_2(x_1), f_3(x_1)) \mid x_1 \in D_F\}$ .

No software Mathematica

$ParametricPlot3D[\{f_1(x_1), f_2(x_1), f_3(x_1)\}, \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}]$

**Definição** Uma curva parametrizada é uma função vetorial de uma variável real a valores reais, isto é,  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ . Assim, se  $\alpha(t)$  é o vetor posição do ponto em relação ao tempo  $t$ , a curva é descrita por uma função  $\alpha$  de um parâmetro escalar com valores vetoriais.

**Superfícies** Seja  $F$  uma função de duas variáveis reais a valores em  $R^3$ .

$$\begin{aligned} F : D \subset R^2 &\longrightarrow R^m, \\ (x_1, x_2) &\longmapsto F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

Se  $m = 3$  a imagem desta função é o traço de uma superfície parametrizada, isto é,

$$Im(F) = \{(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in D_F\}.$$

No software Mathematica

$ParametricPlot3D[\{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2)\}, \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}, \{x_2, x_2 \text{ min}, x_2 \text{ max}\}]$

### 2.1.3 Curvas e Superfícies obtidas pelo Gráfico da função vetorial

**Curvas** Seja  $F$  uma função de uma variável real a valores em  $R^n$ .

$$\begin{aligned} F : D \subset R &\longrightarrow R^m, \\ x_1 &\longmapsto F(x_1) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_1)) \end{aligned}$$

Curva Planar

Seja  $F$  uma **função de uma variável real a valor real**, isto é,  $F : D \subset R \longrightarrow R$ ,  $x_1 \longrightarrow F(x_1) = f_1(x_1)$ . O gráfico de  $F$ , corresponde ao traço de uma curva parametrizada planar, isto é,  $G(F) = \{(x_1, f_1(x_1)) \mid x_1 \in D_F \text{ e } Y = F(x_1)\}$ .

No software mathematica

$ParametricPlot[\{x_1, f_1(x_1)\}, \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}]$

$Plot[f_1(x_1), \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}]$

Curva Espacial

Seja  $F$  uma **função de uma variável real a valores em  $R^2$** , isto é,  $F : D \subset R \longrightarrow R^2$ ,  $x_1 \longrightarrow F(x_1) = (f_1(x_1), f_2(x_1))$ . O gráfico de  $F$ , corresponde ao traço de uma curva

parametrizada espacial, isto é,  $G(F) = \{(x_1, f_1(x_1), f_2(x_1)) \mid x_1 \in D_F \text{ e } Y = F(x_1)\}$ .

No software Mathematica

$ParametricPlot3D[\{x_1, f_2(x_1), f_3(x_1)\}, \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}]$

**Superfícies** Seja  $F$  uma **função de duas variáveis reais a valor em  $R$**

$F : D \subset R^2 \longrightarrow R, (x_1, x_2) \longrightarrow F(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)$

$G(F) = \{(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in D_F \text{ e } Y = F(x_1, x_2)\}$ .

No software Mathematica

$ParametricPlot3D[\{x_1, x_2, f_1(x_1, x_2)\}, \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}, \{x_2, x_2 \text{ min}, x_2 \text{ max}\}]$

$Plot3D[f_1(x_1, x_2), \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}, \{x_2, x_2 \text{ min}, x_2 \text{ max}\}]$

**Superfícies Paramétricas:** o enfoque principal desta atividade é visualizar superfícies que são gráficos de funções reais em duas variáveis reais. Para tal, exploramos seus traços associados aos planos coordenados e o mapa de curvas de nível.

#### 2.1.4 Curvas e Superfícies obtidas pela Curva de Nível de uma função Vetorial

Seja  $F$  uma **função de várias variáveis reais a valores em  $R^m$** .

$F : D \subset R^n \longrightarrow R^m,$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$

Curvas de nível de funções vetoriais  $F : D \subset R^n \longrightarrow R^m$ , isto é,

$C : F^{-1}((k_1, \dots, k_m)) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = (k_1, \dots, k_m)\}$ .

**Curvas Funções de duas variáveis reais a valores em  $R$ : Curvas Implícitas Planares:**

o enfoque principal desta atividade é visualizar curvas que podem ser descritas por equações cartesianas  $f(x_1, x_2) = k_1$ , onde  $f$  é uma função de  $x_1$  e  $x_2$  em  $k \in R$ . Deste ponto de vista uma curva é o conjunto de pontos  $C : \{(x_1, x_2) \in D \mid f(x_1, x_2) = k\}$  que satisfazem a equação  $f(x, y) = k$ .

No software Mathematica

$ContourPlot[f(x_1, x_2) == k, \{x_1, x_1 \text{ min}, x_1 \text{ max}\}, \{x_2, x_2 \text{ min}, x_2 \text{ max}\}]$

**Superfícies** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação diferenciável no aberto  $D$ . Dado  $k \in \mathbb{R}$ , lembramos que o conjunto de nível  $k$  de  $f$  é o conjunto definido por  $f^{-1}(k) = \{(x, y, z) \in D; f(x, y, z) = k\}$ , isto é,  $f^{-1}(k)$  é o conjunto solução em  $D$  da equação  $f(x, y, z) = k$ . Formalmente:

$$S = f^{-1}(k) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = k\}.$$

No software Mathematica

`ContourPlot3D[f1(x1, x2, x3) == k, {x1, x1 min, x1 max}, {x2, x2 min, x2 max}, {x3, x3 min, x3 max}]`

**Curvas Implícitas Espaciais** Curvas mais gerais em  $\mathbb{R}^3$ , Curvas Obtidas pela interseção de duas superfícies ou conjunto de nível de  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ .  $F^{-1}((k_1, k_2)) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)) = (k_1, k_2)\}$ , isto é, podem ser definidas pelo conjunto de pontos que satisfaçam ao mesmo tempo o par de equações  $f_1(x_1, x_2, x_3) = k_1 \cap f_2(x_1, x_2, x_3) = k_2$ .

No software Mathematica

`ContourPlot3D[{f1(x1, x2, x3) == k1, f2(x1, x2, x3) == k2}, {x1, x1 min, x1 max}, {x2, x2 min, x2 max}, {x3, x3 min, x3 max}]`

**Limites de funções vetoriais:** O conceito de limite estende-se facilmente para funções vetoriais, porém para fazer o cálculo do limite já não é tão simples assim, por exemplo o conceito de limite de funções de várias variáveis torna-se mais complexa o cálculo desse tipo de limite. Esta atividade elimina o aparente mistério que envolve a escolha dos caminhos para se mostrar que não existe o limite de uma determinada função de duas variáveis.

No software Mathematica

`Limit[f(x, y), x -> x0, y -> y0]`

Exemplos

`Limit[(xy)/(x^2 + y^2), x -> 0]` O limite ao longo dos eixos coordenados são zero.

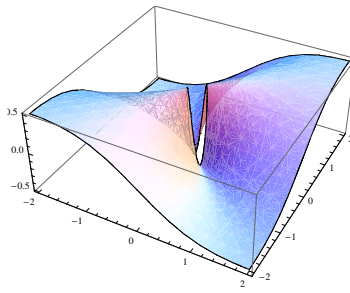
`Limit[(xy)/(x^2 + y^2), x -> y, y -> 0]` O limite ao longo da reta  $y = x$ , com  $y -> 0$ .

`Limit[(xy)/(x^2 + y^2), x -> ty]` limite ao longo da curva  $x = ty$ .

`Plot3D[(xy)/(x^2 + y^2), {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, RegionFunction -> Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 > 0.03], Mesh -> None]`

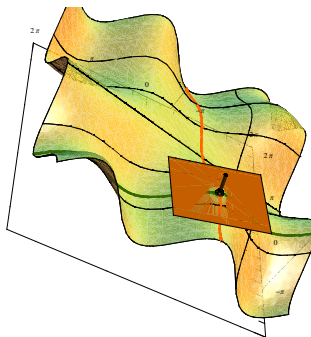
### 2.1.5 Derivadas parciais

O comando  $D[f[x, y, z], var]$  deriva uma função  $f$  parcialmente em função da variável  $var$  definida. Da mesma forma que em derivadas convencionais, é possível calcular a derivada  $n$ -ésima fazendo-se  $[f[x, y, z], \{var, n\}]$ .



**Plano tangente e diferenciabilidade:** nosso objetivo nesta atividade é conectar a existência de plano tangente em um ponto do gráfico de uma função de duas variáveis com a noção de diferenciabilidade. Uma vez assegurada a existência do plano tangente, sua equação é determinada a partir das derivadas parciais da função.

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

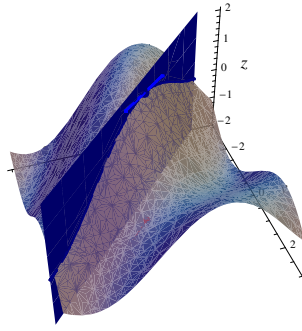


**Derivada direcional e regra da cadeia:** esta atividade trabalha com o conceito de derivada direcional por meio da regra da cadeia, que permite conectar a definição com um resultado clássico que oferece uma alternativa prática para computar a derivada direcional de funções diferenciáveis. A regra da cadeia também é essencial na obtenção da relação entre o vetor gradiente, em um ponto de seu domínio, e a curva de nível que passa por este ponto. Tal relação será deduzida analiticamente e explorada visualmente pelo computador.

$$\nabla_u f = \nabla f \cdot \frac{u}{\|u\|}$$

### 2.1.6 Máximos e Mínimos

**Vetor Gradiente** Para esta função, faz-se necessário carregar o pacote *VectorAnalysis*. Para tal, digite `<< Calculus'VectorAnalysis'` na linha de comando do Mathematica. O vetor gradiente de uma função permite obter a taxa de crescimento de uma função de duas ou mais variáveis (atua de maneira semelhante à derivada, no Cálculo 1). Também vale zero quando em um ponto crítico.



É definido por:  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

$$\text{Grad}[f(x, y, z), \text{Cartesian}[x, y, z]]$$

**Hessiana** A matriz hessiana fornece algumas informações sobre um ponto crítico de uma função

$z = f(x, y)$  e é definida por:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

as derivadas parciais são avaliadas no ponto que se deseja analisar. Basta analisar as seguintes

Se  $f_{xx} < 0$  e  $\det H > 0$ , temos um ponto de máximo local.

Se  $f_{xx} > 0$  e  $\det H > 0$ , temos um ponto de mínimo local.

Se  $\det H < 0$ , temos um ponto de sela (inflexão)

Se  $\det H = 0$ , nada se conclui.

No software Mathematica

```
z := f[x, y]
D[f[x, y], {{x, y}, 2}]
```

Exemplo:

```
In[10] := f[x, y] := x^3 + x * y^2;
```

```
D[f[x, y], {{x, y}, 2}]
```

```
Out[11] = {{6x, 2y}, {2y, 2x}}
```

## 2.2 Integrais duplas e triplas

Para se calcular integrais duplas e triplas procede-se de maneira semelhante ao cálculo de integrais simples, sendo que agora a expressão pode conter outra integral, observe:

Integrais Duplas

$\text{Integrate}[\text{Integrate}[f(x, y), x], y]$  ou  $\int \int f(x, y) dx dy$

Integrais Triplas

$\text{Integrate}[\text{Integrate}[\text{Integrate}[f(x, y, z), x], y], z]$  ou  $\int \int \int f(x, y) dx dy$

## 2.3 Tópicos do Cálculo Vetorial

### 2.3.1 Campo Vetorial

Um campo vetorial num plano é uma função que associa a cada ponto  $P$  do plano um único vetor  $F(P) = (M, N)$  paralelo ao plano. Analogamente, um campo vetorial no espaço tridimensional é uma função que associa a cada ponto  $P$  espaço tridimensional um único vetor  $F(P) = (M, N, Q)$  do espaço.

No software Mathematica

$\text{VectorFieldPlot}[\{M(x, y), N(x, y)\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}, \{y, y_{\min}, y_{\max}\}]$

$\text{VectorFieldPlot3D}[\{M(x, y, z), N(x, y, z), Q(x, y, z)\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}, \{y, y_{\min}, y_{\max}\}, \{z, z_{\min}, z_{\max}\}]$

### 2.3.2 Rotacional e divergente

Finalizando os conceitos de Cálculo 2, existem duas definições particularmente importantes:

**Rotacional:** mostra a tendência de um campo vetorial girar ao redor de um ponto. Ex.: o campo de velocidades de um fluido. Um campo cujo rotacional é nulo é dito conservativo. É um vetor definido pela operação: Seja  $F$  um campo vetorial  $F = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix}$$

No Mathematica, tal operação é definida por  $\text{Curl}[F]$ .

**Divergente:** mostra o fluxo de um campo vetorial em uma dada área. É definido pela operação:

$$\begin{aligned} \text{div } F &= \nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned}$$

No Mathematica, tal operação é definida por  $\text{Div}[F]$ .

**Teorema de Green:** Teorema que relaciona uma integral de linha sobre uma curva fechada num plano com uma integral dupla sobre a região compreendida no interior dessa curva.

**Teorema de Stokes:** é uma generalização do teorema de Green, no plano, para o espaço tridimensional. O fluxo de um rotacional de um campo vetorial  $F$  através de uma superfície  $S$  é igual à integral de linha da componente tangencial de  $F$  aplicada na fronteira de  $S$ .

**Teorema da divergência:** é uma generalização do teorema de Green, no plano, para o espaço tridimensional. Este teorema efetua uma profunda conexão entre divergente e o fluxo de um campo vetorial.

### 3 Objetivos

O objetivo deste projeto é aprofundar o conhecimento do aluno sobre cálculo diferencial e integral II usando o software mathematica.

Como é um projeto de apoio para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, o projeto também tem como objetivo um atendimento semanal aos alunos que cursam as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II do curso de licenciatura de Matemática da FEIS/UNESP, conforme especificamos no item Plano de Atividades do Bolsista.

Quanto ao objetivo acadêmico, pretendemos que o aluno ganhe experiência participando de congressos e eventos de iniciação científica, tanto com apresentação oral como em painel e resumos. Com as apresentações de seminários semanais, o aluno também terá experiências para futuras palestras e conferências. E a meta principal é dar uma base, incentivo e maturidade necessárias para que o aluno tenha maiores chances de iniciar um mestrado em matemática.

### 4 Programa

O presente projeto será desenvolvido aplicando o software Mathematica para os seguintes tópicos de Cálculo Diferencial II.

#### Cálculo de várias variáveis

1. Funções Vetoriais de uma Variável Real e Curvas.
  - 1.1. Funções vetoriais de uma variável real.
  - 1.2. Limite e continuidade de funções vetoriais.
  - 1.3. Curvas e equações paramétricas de uma curva.
  - 1.4. Derivada de uma equação vetorial.
  - 1.5. Regras de derivação.
  - 1.6. Comprimento de arco e função comprimento de arco.
  - 1.7. Parametrização pelo comprimento de arco.
  - 1.8. Vetores tangente e normal à curva.
  - 1.9. Aplicações à Mecânica.

2. Funções Reais de Várias Variáveis.
  - 2.1. Funções e gráficos: curvas de nível.
  - 2.2. Limite e continuidade.
  - 2.3. Derivadas parciais e derivada direcional.
  - 2.4. Diferenciabilidade.
  - 2.5. Regra da cadeia e plano tangente.
  - 2.6. Derivada direcional e gradiente.
3. Máximos e Mínimos - Fórmula de Taylor.
  - 3.1. Máximos e mínimos. Caracterização de máximos e mínimos locais.
  - 3.2. Método dos multiplicadores de Lagrange.
  - 3.3. Extensão do método dos multiplicadores de Lagrange.
  - 3.4. Fórmula de Taylor.
4. Funções Implícitas e Transformações.
  - 4.1. Função implícita de uma variável.
  - 4.2. Função implícita de duas variáveis.
  - 4.3. Funções implícitas de várias variáveis e Jacobianos.
  - 4.3. Teorema das Funções Inversas.
  - 4.5. Transformações e suas Inversas. Mudança de Coordenadas: Coordenadas polares, Cilíndrica e Esféricas.
5. Integrais Duplas e Triplas.
  - 5.1. Integrais duplas: áreas e volumes, integrais iteradas, propriedades.
  - 5.2. Mudança de variáveis nas integrais duplas.. Coordenadas polares e mudança geral de variáveis.
  - 5.3. Integrais impróprias.
  - 5.4. Integrais triplas. Definição e Propriedades.
  - 5.5. Mudança de variável nas integrais triplas. Coordenadas cilíndricas e esféricas.
  - 5.6. Aplicações : densidade de massa, centro de massa e momento de inércia.
6. Integrais de Linha. Teorema de Green.
  - 6.1. Campos vetoriais e escalares. Divergente e rotacional.
  - 6.2. Funções potenciais, campos conservativos e domínios simplesmente conexos. Existência de funções potenciais.

- 6.3. Integrais de linha no plano e no espaço.
  - 6.4. Integrais com relação ao comprimento de arco. Propriedades fundamentais das integrais de linha.
  - 6.5. Integrais de linha vistas como integrais de vetores.
  - 6.6. Integrais de linha independentes do caminho e domínios conexos por caminhos.
  - 6.7. Teorema de Green e Domínios simples. Teorema de Gauss e identidades de Green. Fórmula de Leibniz para a derivada de uma integral.
  - 6.8. Integração em campos conservativos.
- 7. Teoremas de divergência e de Stokes.
    - 7.1. Área de uma superfície. Integrais de Superfícies.
    - 7.2. Teoremas da Divergência e de Stokes. Interpretação física do divergente e do rotacional.

## 5 Metodologia

O presente projeto será desenvolvido na forma de seminários com exposições semanais do bolsista ao orientador e atendimentos semanais aos alunos que cursam Cálculo Diferencial e Integral II do curso de licenciatura em Matemática da FEIS/UNESP. Nesses atendimentos serão mostrados aos alunos tópicos desenvolvidos e preparados pelo bolsista durante o projeto. Serão feitas discussões semanais, pelo contato direto com o orientador, a fim de sanar possíveis dúvidas, antes das exposições e atendimentos. Com isto, espera-se que o bolsista desenvolva a capacidade de ler e compreender textos novos, transmitir suas idéias de forma clara e objetiva em exposições e conseqüentemente proporcionar ao aluno condições de desenvolver sua didática.

## 6 Plano de Atividades do Bolsista

Com o objetivo de desenvolver o projeto segundo a metodologia descrita anteriormente, as atividades do bolsista estão assim programadas:

- estudo e preparação de seminários;
- exposições semanais ao orientador;
- discussões e resoluções de problemas;
- atendimentos semanais aos alunos que cursam as disciplinas de Cálculo Diferencial e integral II do curso de licenciatura de Matemática da FEIS/UNESP, que acompanham os tópicos vistos em seminários com o orientador.

Também planejamos a participação do bolsista em reuniões científicas de sua categoria, com apresentação de trabalhos e elaboração de oficinas.

## 7 Formação do Bolsista

Este projeto destina-se a um aluno do Curso de Licenciatura em Matemática da FEIS - UNESP, em Ilha Solteira-SP. Temos como meta introduzir tópicos do Cálculo Diferencial e Integral de funções de várias variáveis reais ao aluno, usando o software Mathematica.

A escolha do projeto a ser trabalhado pelo aluno é devido ao fato de iniciarmos um trabalho de apoio à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II do curso de Licenciatura em Matemática, com a idéia de podermos ajudar os alunos do curso de licenciatura em Matemática. Esperamos que essa preparação em seu conhecimento e experiência em iniciação científica, possa ajudar posteriormente em uma seleção para um curso de mestrado, já que o aluno tem grande potencial e interesse em fazer uma pós-graduação.

## 8 Cronograma

O programa desenvolvido em duas etapas contendo vinte e sete tópicos de Cálculo especificados anteriormente será distribuído da seguinte maneira:

1. Março/2009: Funções Vetoriais de uma Variável Real e Curvas.  
Curvas. **Seja  $F$  uma função de uma variável real a valores em  $R^n$ .** Funções de uma variável a valores em  $R^n$ ,  $n = 2, 3$ : Imagem, gráficos e curvas de nível.  
Superfícies. **Seja  $F$  uma função de duas variáveis reais a valores em  $R^3$ .**
2. Abril/2009: Funções de Várias Variáveis: Curvas e Superfícies. Funções de várias variáveis a valores em  $R^n$ ,  $n = 2, 3$ : Gráficos e Curvas de nível.  
Curvas. Gráfico de uma **função de uma variável real a valores reais.**  
Superfícies. Gráfico de uma **função de duas variáveis reais a valores reais**
3. Maio/2009: Funções de Várias Variáveis: Plano tangente e diferenciabilidade. Derivada direcional e regra da cadeia.
4. Junho e Julho/2009: Máximos e Mínimos - Fórmula de Taylor.
5. Agosto/2009: Integrais duplas: áreas e volumes, integrais iteradas, propriedades. Mudança de variáveis nas integrais duplas.. Coordenadas polares e mudança geral de variáveis. Integrais impróprias.
6. Setembro/2009: Integrais triplas. Definição e Propriedades. Mudança de variável nas integrais triplas. Coordenadas cilíndricas e esféricas. Aplicações : densidade de massa, centro de massa e momento de inércia.

7. Outubro/2009: Integrais de Linha. Teorema de Green. Campos vetoriais e escalares. Divergente e rotacional. Funções potenciais, campos conservativos e domínios simplesmente conexos. Existência de funções potenciais. Integrais de linha no plano e no espaço. Integrais com relação ao comprimento de arco. Propriedades fundamentais das integrais de linha. Integrais de linha vistas como integrais de vetores. Integrais de linha independentes do caminho e domínios conexos por caminhos. Teorema de Green e Domínios simples. Teorema de Gauss e identidades de Green. Fórmula de Leibniz para a derivada de uma integral. Integração em campos conservativos.
8. Novembro e Dezembro/2009: Teoremas de divergência e de Stokes. Área de uma superfície. Integrais de Superfícies. Teoremas da Divergência e de Stokes. Interpretação física do divergente e do rotacional.
9. Janeiro e Fevereiro/2010: Escrever o Relatório.

## Referências

- [1] FALCETTA, Filipe e ROSA, M. A. de Faria - "Tutorial Mathematica v5.0 para Windows". Apostila do curso de Cálculo 1, 2005. [www.ime.unicamp.br/~marcio/tut2005/mathematica/043576Filipe.pdf](http://www.ime.unicamp.br/~marcio/tut2005/mathematica/043576Filipe.pdf)
- [2] FIGUEIREDO, Vera L. X.; MELLO, Margarida P.; SANTOS, Sandra A. - "Cálculo com aplicações: Atividades Computacionais e Projetos". Coleção IMECC / UNICAMP. Textos Didáticos, vol.3, 2005.
- [3] GUIDORIZZI, H.L. - "Um Curso de Cálculo". Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1985, vol.1 e 2.
- [4] LEITHOLD, L.D. - "O Cálculo com Geometria Analítica". Harper e Row do Brasil, 1990, vol.1 e 2.
- [5] SWOKOWSKI, E.W. - "Cálculo com Geometria Analítica". São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1992, vol.1 e 2.
- [6] THOMAS, George B. - "Cálculo", São Paulo, Addison Wesley/Pearson Education do Brasil, 2002, vol. 1 e 2.
- [7] WOLFRAM, Stephen - "Mathematica: the student book". Addison-Wesley Publishing Company, 1994.