Sumário

1 INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS **1**
1.1 DEFINIÇÕES E CONCEITOS 1
1.1.1 DEFINIÇÃO Equação Diferencial 2
1.1.2 TERMINOLOGIA E DEFINIÇÕES BÁSICAS 2
1.1.3 Exercícios 8
1.1.4 ALGUNS MODELOS MATEMÁTICOS 10

2 Equações Diferencial de Primeira Ordem **17**
2.1 Variáveis Separáveis 20
2.2 Equações Homogêneas 21
2.3 Equações Exatas 25
2.3.1 Exercícios 29
2.4 Equações Lineares 34

Osmar Aléssio e Marcela L. V. de Souza

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM O MATHEMATICA

Notas de Aula

Rascunho de uma versão preliminar

Fevereiro de 2009

Capítulo 1

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1.1 DEFINIÇÕES E CONCEITOS

No curso de cálculo, você aprendeu que, dada uma função $y = f(x)$, a derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

é também, ela mesma, uma função de x e é calculada por regras apropriadas. Por exemplo, se $y = e^{x^2}$, então

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = 2xy$$

O problema com o qual nos deparamos neste curso não é: dada uma função $y = f(x)$, encontre sua derivada. Nosso problema é: dada uma equação como $\frac{dy}{dx} = 2xy$, encontre, de algum modo, uma função $y = f(x)$ que satisfaça a equação. Em outras palavras, nós queremos resolver equações difrenciais.

Variáveis Independentes e dependentes

Seja dada uma função $y = f(x)$, a variável x é independente e a variável y é dependente de x. A derivada simples ou ordinária em relação a variável independente x é $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Seja dada a seguinte função $z = f(x, y)$, as variáveis x e y são independentes e a variável z é dependente de x e y. As derivadas parciais em relação as suas duas variáveis indenpendentes x e y são: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.
A diferencial da função $z = f(x, y)$ é $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

1.1.1 DEFINIÇÃO Equação Diferencial

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de **equação diferencial (ED).**

1.1.2 TERMINOLOGIA E DEFINIÇÕES BÁSICAS

Classificação pelo Tipo

Se na equação diferencial tivermos somente funções desconhecidas que dependam de uma única variável independente, está equação conterá somente derivadas ordinárias (simples) e ela é chamada de **equação diferencial ordinária** (EDO). Resumindo, uma EDO é uma equação que contém somente derivadas ordinárias de **uma ou mais variáveis** dependentes (funções), com relação a uma **única** vairável independente.

Por exemplo,

$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$
$(y - x)dx + 4xdy = 0$
$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$
$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

são equações diferenciais ordinárias. Mais precisamente, uma EDO é uma equação da forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas ou suas diferenciais. x é a variável independente, y é a variável dependente e o símbolo $y^{(k)}$ denota a derivada de ordem k da função $y = y(x)$.

Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes (u, v, etc) de duas ou mais variáveis independentes (x_1, x_2, etc) é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**. Por exemplo,

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ duas variáveis independentes x e y e duas variáveis dependentes u e v.
$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$ duas variáveis independentes x e y e uma variável dependente u.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y}$ três variáveis independentes x, y e t e uma variável dependente u.

Exemplos típicos:

a) Equação do Calor

$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$

b) Equação da Onda

$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$

Observação: A equação diferencial abaixo não é uma EDP.

$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ uma variável independente x e duas variáveis dependentes u e v.

Mais precisamente, uma EDP é uma equação da forma

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0$$

Classificação pela Ordem

A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação. Por exemplo,

$3y''' + y'' + (y')^5 + y = 0$ é uma equação diferencial de terceira ordem e

$4x \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$ é uma equação diferencial de quarta ordem.

Mais Exemplos

1. $y'' + 3y' + 6y = sin(x)$ e $y'' + 3yy' = e^x$ têm ordem 2.
2. $(y'')^3 + 3(y')^{10} + 6y = tan(x)$ tem ordem 2.
3. $y' = f(x, y)$ e $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ têm ordem 1.
4. $3\,(y''')^2 + (y'')^7 + (y')^3 + y = 0$ tem ordem 3.

Classificação como Linear ou Não-Linear

EDO

Uma equação diferencial ordinária é chamada de **linear** quando pode ser escrita na forma

$a_n\,(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\,(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\,(x) \frac{dy}{dx} + a_0\,(x)\, y = g\,(x)$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:
(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cadaq termo envolvendo y é 1.
(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável indenpendente x.

Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear**.

As equações

$$xdy + ydx = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

e

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

são equações diferenciais ordinárias de primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente. Por outro lado,

$$yy'' - 2y' = x$$

e

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$$

são equações diferenciais ordinárias não-lineares de segunda e terceira ordens, respectivamente.

EDP

Uma equação diferencial parcial é chamada de **linear** se as variáveis dependentes u, v, etc e todas as suas derivadas parciais são do primeiro grau e em nenhum termo da equação aparece uma multiplicação entre eles, caso contrario a EDP é **não-linear**.

$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u\left(x,t\right) = 0$ EDP linear

$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2$ EDP não-linear, pois a derivada de u em relação a t $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ tem grau 2.

$u_{xx} + u_{yy} + u\ u_x + u = 0$ EDP não-linear, pois o termo $u\ u_x$ é a multiplicação da variável dependente e sua derivada em relação a x.

Soluções

Embora as equações diferenciais parciais sejam muito importantes, seu estudo demanda um bom conhecimento da teoria de equações diferenciais ordinárias. Portanto, na discussão que se segue, limitaremos nossa atenção às equações diferenciais ordinárias.

Uma solução de uma equação diferencial de ordem n em um intervalo $I \subset R$ é uma função $y(x)$ definida no intervalo I tal que as suas derivadas de ordem até n estão definidas no intervalo I e satisfazem a equacão neste intervalo.

Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

é uma solução f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação; isto é,

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$$

para todo x no intervalo I.

Para evitar ambiguidades que possam aparecer, vamos estudar equações que possam ser resolvidas em função para a maior derivada, isto é,

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

para evitar que uma equação do tipo

$(y')^2 + y' + 3y = 0$

leve a duas equações,

$y' = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 12y}}{2}$ ou $y' = \dfrac{-1 - \sqrt{1 - 12y}}{2}$

Exemplo 1

Considere a equação

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Vamos mostrar que $y = e^{-x}$ é solução da equação diferencial no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$.

$$y'' = e^{-x}$$

$$y' = -e^{-x}$$
$$y = e^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} + 2(-e^{-x}) + e^{-x} = 0$$

Exemplo 2

Considere a equação

$$y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0$$

no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
Vamos mostrar que $y = \dfrac{x^4}{16}$ é solução da equação diferencialn no intervalo I.

$$y' = \frac{x^3}{4}$$
$$y^{\frac{1}{2}} = (\frac{x^4}{16})^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$$
$$y = e^{-x}$$

$$y' - xy^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - x\frac{x^2}{4} = 0$$

Exemplo 3

Considere a equação

$$y'' + 4y = 0$$

no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
Vamos mostrar que $y = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos 2x$ é solução da equação diferencialn no intervalo I.

$$y' = 2c_1 \cos(2x) - 2c_2 \sin 2x$$
$$y'' = -4c_1 \sin(2x) - 4c_2 \cos 2x$$

$$y'' - 4y = -4c_1 \sin(2x) - 4c_2 \cos(2x) + 4(c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)) = 0$$

Note que, nos Exemplos 1, 2 e 3, a função constante $y = 0$ também satisfaz a equação diferencial dada para todo x real. Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo I é em geral referida como **solução trivial**.

Soluções Explícitas e Implícitas

Uma solução para uma equação diferencial ordinária que pode ser escrita na forma $y = f(x)$ é chamada de solução **solução explícita**. Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial ordinária em um intervalo I, se ela define uma ou mais soluções em I.

Exemplo 4

Para $-2 < x < 2$, a relação $x^2+y^2-4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Segue, por derivação implícita, que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0\\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0\\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\end{aligned}$$

A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define duas funções diferenciais explícitas $y = \sqrt{4-x^2}$ e $y = -\sqrt{4-x^2}$ no intervalo $(-2, 2)$.

Número de Soluções

As equações diferenciais geralmente possuem um número infinito de soluções.

Exemplo 1

$x^2 + y^2 - c = 0$ são soluções para $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Por exemplo:

$c = 2$ temos $x^2 + y^2 - 2 = 0$ é solução para $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$,

$c = 4$ temos $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é solução para $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, Exemplo2

$y = ce^{x^2}$ são soluções para $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$. Por exemplo:
$c = 2$ temos $y = 2e^{x^2}$ é solução para $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$.
$c = 4$ temos $y = 4e^{x^2}$ é solução para $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$.

$G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ é chamada de família a n-parâmetros de soluções.

Solução Particular

Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de **solução particular**. Uma maneira de obter uma solução particular é escolher valores específicos para o(s) parâmetro(s) na família de soluções. Por exemplo, é fácil ver que $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro para a equação de primeira ordem muito simples $y' = y$. Para $c = 0, -2$ e 5, obtemos soluções particulares $y = 0$, $y = -2e^x$ e $y == 5e^x$, respectivamente.

Algumas com muitas soluções e outras com nenhuma

Uma equaçõa da forma

$$F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

sempre tem solução?
A resposta é não. Nem toda equação diferencial que escrevemos possui necessariamente uma solução. Veja os exemplos:

$$(\frac{dy}{dx})^2 + 1 = 0$$
$$(y')^2 + y^2 + 4 = 0$$

1.1.3 Exercícios

1) Determine o ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não.

1. **(a)** $y'' + 2y' + y = 0$
   (b) $y'' + 2yy' + y = 0$
   (c) $y''' + 2y' + y = x^2$

(d) $(y'')^2 + 2y' + y = 0$

(e) $y'' + 2y' + y = sen(x)$

(f) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = sen(y)$

(g) $\frac{d^4y}{dx^4} + sen(x)y' + y = x^2$

(h) $u_{xxx} + u_{yy} + u_x + u = 0$

(i) $u_t + u\ u_x + u = 0$

2) Verifique que cada função dada é uma solução da equação deferencial

1. **(a)** $y'' - y = 0;\quad y_1(t) = e^t;\quad y_2(x) = \cosh(x)$

   (b) $u_{xx} + u_{yy} = 0;\ u_1(x,t) = \cos(x)\cosh(t),\quad u_2(x,t) = \ln(x^2 + t^2)$

   (c) $y' - \frac{1}{x}y = 1;\quad y = x\ln(x),\ x > 0$

   (d) $a^2 u_{xx} = u_{tt},\quad u_1(x,t) = sen(\lambda x)sen(\lambda at),\quad u_2(x,t) = sen(x - at),$ λ é uma constante real.

1.1.4 ALGUNS MODELOS MATEMÁTICOS

Em ciências, engenharia, economia e até em psicologia, frequentemente desejamos descrever ou modelar o comportamento de algum sistema em termos matemáticos. Essa descrição começa com

(i) identificar as variáveis que são responsáveis por mudanças do sistema, e

(ii) um conjunto de hipóteses razoáveis sobre o sistema.

As hipósteses também

Corpo em Queda livre

A descrição matemática de um corpo caindo verticalmente sob a influência da gravidade leva a uma simples equação diferencial de segunda ordem. A solução para essa equação fornece-nos a posição do corpo em relação ao solo.

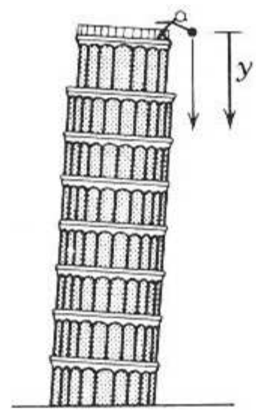
EXEMPLO 1

É bem conhecido que um objeto em queda livre à superfície da terra ém acelerado a uma taxa constante g. Aceleração é a derivada da velocidade, que, por sua vez, é a derivada da distância y. A lei da Física uqe govcerna o movimento de objetos é a segunda lei de Newton, que diz que a massa do objeto vezes sua aceleração é igual à força totol atuando sobre o obejto.

$$F = ma$$

onde m é a massa do obejto, a sua aceleração e F a força total agindo sobre o objeto.

Suponha uma pedra seja atirada do alto de um edifício, como ilustrado na Figura abaixo



A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, ou mg, onde $g = 9,8m/s^2$ é a aceleração devido à gravidade. Definindo o sentido positivo para cima, então o enunciado matemático

$$F = -mg$$

$$ma = -mg$$

$$a = -g$$

como $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$, temos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

é a equação diferencial que governa a trajetória vertical do corpo. O sinal de subtração é usado porque o peso do corpo é uma força direcionada para baixo, ou seja, oposta à direção positiva.

Corpo em Queda Com Resistência do Ar

Vamos considerar todas as forças que agem sobre o objeto.

EXEMPLO 2

A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, ou mg, onde $g = 9,8m/s^2$ é a aceleração devido à gravidade. Existe, também, uma força devido a resistência do ar , a resistência do ar é proporcional a velociodade γv, onde γ é uma constante chamada de coeficiente de resistência do ar. O valor numérico do coeficiente de resistência do ar vaira muito de um objeto para outro.

Definindo o sentido positivo para cima, então o enunciado matemático

$$F = -mg + \gamma v$$

$$ma = -mg + \gamma v$$

$$a = -g + \frac{\gamma}{m} v$$

como $a = \frac{dv}{dt}$, temos

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\gamma}{m} v$$

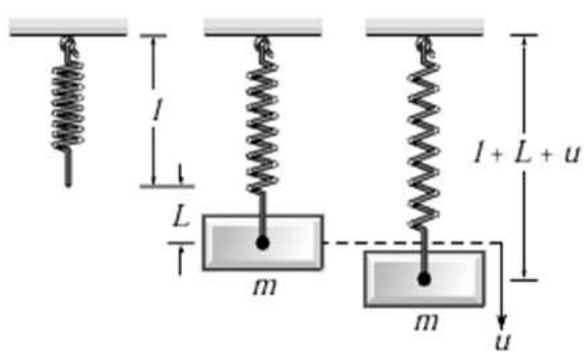
é a equação diferencial que governa a trajetória vertical do corpo. O sinal de subtração é usado porque o peso do corpo é uma força direcionada para baixo, ou seja, oposta à direção positiva.

Sistema Massa-Mola

Quando a segunda lei de Newton sobre o movimento é combinada com a lei de Hooke, podemos obter uma equação diferencial que governa o movimento de uma massa atada a uma mola.

EXEMPLO 3

Para calcular o deslocamento vertical $y(t)$ de uma massa atada a uma mola, usamos duas leis empíricas: a segunda lei de Newton sobre o movimento e a lei de Hooke. A primeira delas diz que a resultante das forças que atuam sobre o sistema em movimento é $F = ma$, em que m é a massa e a, a aceleração. A lei de Hooke diz que a força restauradora é $k(s+y)$, em que $k > 0$ é uma constante.
Para entender melhor as forças atuando sobre o objeto, veja a figura abaixo



Existem duas forças atuando sobre o objeto. A força gravitacional $W = mg$ (peso) e a força devido a mola $F_s = -kL$ (lei de Hooke), onde a constante de proporcionalidade k é chamada constante da mola. Como a massa está em equlíbrio, as duas forças estão balanceadas, o que significa que

$$F - F_s = 0$$

$$mg - kL = 0$$

Quando o sistema está em movimento, a variável u representa o deslocamento da massa em relação ao ponto de equilíbrio. Então $u(t)$ está relacionado às forças que agem sobre a massa pela lei do movimento de Newton,

$$mu''(t) = f(t)$$

Logo, na ausência de amortecimento ou outras forças externas quaisquer que poderiam atuar sobre o sistema, vamos considerar somente duas forças para se determinar f:
1. O peso $W = mg$ da massa sempre age para baixo.
2. A força da mola F_s é suposta de ser proporcional ao alongamento de total $L + u$ da mola e sempre age para restaurar a mola à sua posição natural.

$$F_s = -k(L + u)$$

Levando em consideração essas forças, podemos escrever a lei de Newton $mu''(t) = f(t)$ como

$$mu''(t) = mg - F_s$$

$$mu''(t) = mg - k(L + u)$$

$$mu''(t) = mg - kL - ku$$

, como $mg - kL = 0$, segue

$$mu''(t) = -ku$$

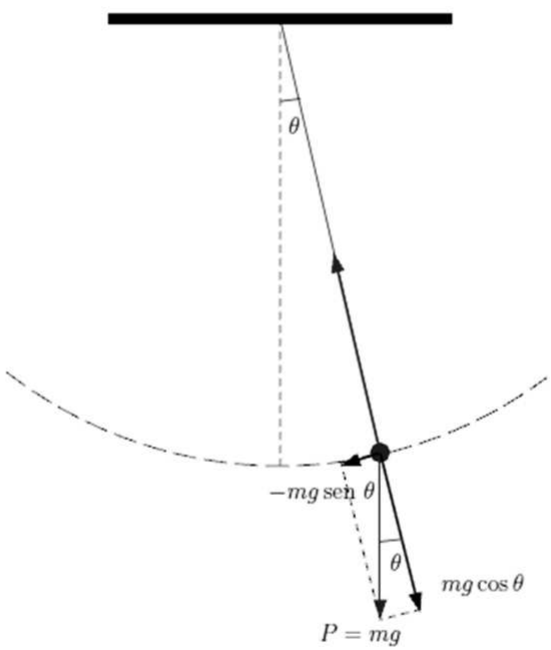
Pêndulo Simples

O Pêndulo Simples é um corpo idela que consiste de uma massa puntiforme suspensa por um leve fio inextensível. Quando afastado de sua posição de equilíbrio e largado, o pêndulo oscilará em um plano vertical, sob ação da gravidade.
Queremos determinar o ângulo θ, medido a partir da linha vertical, como uma função do tempo t. Lembre-se de que um arco s de um círculo de raio l está ralacionado com o ângulo central θ através da fórmula $s = l\theta$.
Pela segunda lei de Newton, temos

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

EXEMPLO 4

A figura representa um pêndulo de comprimento l, sendo m a massa da partícula. O componente tangencial de $W = mg$ constitui a força restauradora que atua em m e que faz tender a voltar à posição de equlibrio.



A força restauradora será, portanto $F = -mgsen(\theta)$,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen(\theta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}sen(\theta)$$

Lei do Esfriamento de Newton

De acordo com a empírica lei de esfriamento de Newton, a taxa de esfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente.

Suponha que $T(t)$ denote a temperatura de um corpo no instante t e que a temperatura do emio ambiente seja constante, igual a T_m. Se $\frac{dT}{dt}$ representa a taxa de variação da temperatura do corpo, então a lei de esfriamento de Newton poderá ser expressa matematicamente da seguinte forma

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Crescimento Populacional

Problemas populacionais nos levam fatalmente às perguntas:

Qual será a população de um certo local ou meio ambiente em alguns anos?

Como poderemos proteger os recursos deste local ou deste meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies?

Para apresentar uma aplicação de equações diferenciais relacionado com este problema, consideraremos o modelo matemático mais simples para tratar sobre o crescimento populacional de algumas espécies. Ele é chamado o Modelo de Crescimento Exponencial, isto é, a taxa de variação da população em relação ao tempo, aqui denotada por $\frac{dP}{dt}$, é proporcional à população presente. Em outras palavras, se $P = P(t)$ mede a população, nós temos

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Capítulo 2

Equações Diferencial de Primeira Ordem

As equações diferenciais ordinárias de $1^{a.}$ ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(x; y; y_0) = 0 :$$

Vamos estudar equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

(1) $$\frac{dy}{dx} = f(x; y)$$

Uma solução (particular) de uma equação diferencial (1) em um intervalo I é uma função $y(x)$ definida no intervalo I tal que a sua derivada $y_0(x)$ está definida no intervalo I e satisfaz a equação (1) neste intervalo.

O problema

(2) $$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x; y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é chamado **problema de valor inicial**. Uma solução do problema de valor inicial (2) em um intervalo I é uma função $y(t)$ que está definida neste intervalo, tal que a sua derivada também está definida neste intervalo e o gráfico de $y(t)$ passe por um ponto (x_0, y_0).

Quando resolvemos uma equação diferencial ordinária de 1a. ordem normalmente obtemos uma família de soluções que dependem de uma constante arbitrária. Se toda solução particular puder ser obtida da família de soluções que encontramos por uma escolha apropriada da constante dizemos que a família de soluções é a solução geral da equação.

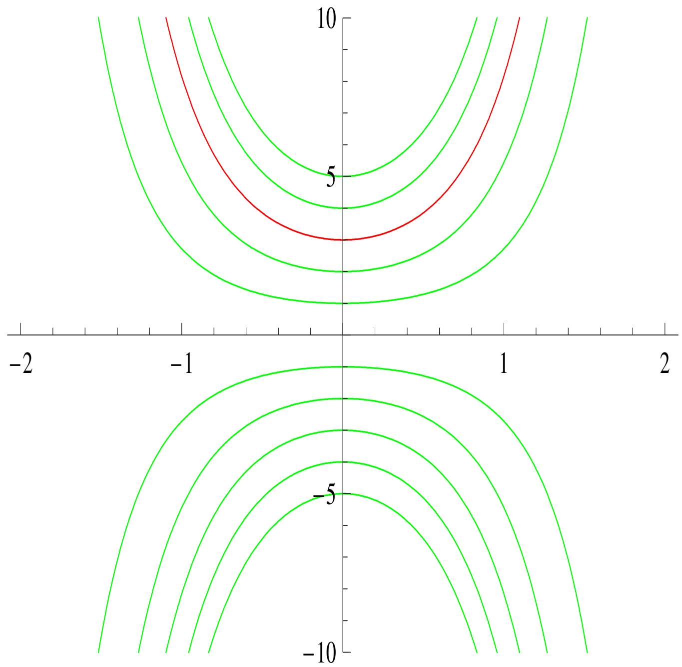
EXEMPLO 1

Seja c uma cosntante qualquer, então $y(x) = ce^{x^2}$ é uma família a um parâmetro de soluções para

(3) $$\left\{ \frac{dy}{dx} = -6xy \right.$$

no intervalo $(,)$. Se especificarmos, digamos, $y(0) = 3$, então substituindo $x = 0$, $y = 3$ na família, obteremos $3 = ce^0 = c$. Logo, como mostrado na figura abaixo, a curva em vermelho é o gráfico da função $y(x) = 3e^{x^2}$, que é solução para o problema de valor incial

(4) $$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -6xy \\ y(0) = 3 \end{cases}$$



Teorema da Exitência e Unicidade

A questão fundamental surge quando consideramos um problema de valor incial como 2:
Existe uma solução para o porblema?
Se existe uma solução, ela é única?
Problemas de existência e unicidade têm relevância também no processo de modelagem matemática. Suponha que estamos estudando um sistema físico cujo comportamento é

completamente determinado por certas condições iniciais, mas que nosso modelo matemático proposto envolve uma equação diferencial que não tenha solução única. Isto imediatamente levanta a questão de se o modelo matemático representa adequadamente o sistema físico. Além disso, se conseguir encontrar uma solução, você pode estar interessado em saber se deve continuar a procurar outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções.

Teorema de Existência e Unicidade

Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x,y)$ e $f_y(x,y)$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.

EXEMPLO 1

Considere o problema de valor incial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(a) = b \end{cases} \tag{5}$$

para $x \leq 0$.

O Teorema da Existência e Unicidade implica a existência de uma única solução passando por qualquer ponto (a, b), pois $f(x, y) = y$ é contínua em toda parte e a sua derivada $f_y(x, y) = 1$ também é contínua em toda parte. A família de soluções $y = ce^x$ satisfaz a equação diferencial $y' = y$. A solução única do problema (5) é $y = be^{-a}e^x$.

EXEMPLO 2

Considere o problema de valor incial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

para $x \leq 0$. O Teorema da Existência e Unicidade não pode ser aplicado a esse problema de valor inicial, Por que?.

Porque, mesmo que a função $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ seja contínua em toda parte a sua derivada em relação a y $f_y(x, y) = \frac{y^{-\frac{2}{3}}}{3}$ não existe quando $y = 0$, logo não é contínua aí. Assim, o Teorema não se aplica a esse problema de valor incial e não podemos concluir nada dele. No entanto, a continuidade de f garante a existência de soluções, embora não garanta a unicidade.

A família de funções $y = [\frac{2}{3}(x + c)]^{\frac{3}{2}}$ é solução para a eq. dif. $\frac{dy}{dx} = y^{1/3}$.

Porém somente para $c = 0$ a família satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$. Também temos outras funções que não são da família $y = [\frac{2}{3}(x + c)]^{\frac{3}{2}}$, mas satisfazem o problema de valor inicial (6)4. Veja alguns exemplos:
$y = 0$
$y = -(\frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}}$

2.1 Variáveis Separáveis

As equações separáveis são equações que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{7}$$

Podemos ter casos particulares da forma acima, por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h_1(y)$$

, onde

$$h(y) = \frac{1}{h_1(y)};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h_2(y)}{g_2(x)}$$

onde

$$h(y) = \frac{1}{h_2(y)} \quad e \quad g(x) = \frac{1}{g_2(x)};$$

Método de Solução

Podemos multiplicar a equação (7) por $h(y)$ e dx, daí temos

$$h(y)dy = g(x)dx$$

integra ambos os lados

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

EXEMPLO 2

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -6xy \\ y(0) = 7 \end{cases} \tag{8}$$

Solução Informalmente, dividimos cada lado da equação diferencial por y e multipliquemos cada lado por dx para obter

$$\frac{dy}{y} = -6xdx$$

Então

$$\int \frac{dy}{y} = -\int 6xdx$$

$$\ln|y| = -3x^2 + c_1$$

Vemos pela condição incial $y(0) = 7$ que $y(x)$ é positivo perto de $x = 0$, e então podemos "deletar"o símbolo de varlor absoluto

$$\ln y = -3x^2 + c_1$$

e daí

$$y = e^{-3x^2+c_1} = e^{-3x^2}e^{c_1} = c_2e^{-3x^2}$$

onde $c_2 = e^{c_1}$. A condição $y(0) = 7$ fornece $c_2 = 7$, e portanto a solução desejada é

$$y = 7e^{-3x^2}$$

2.2 Equações Homogêneas

Uma equação diferencial de primeira ordem é homogênea se puder ser escrita da forma

(9) $$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Fazendo as substituições

$v = \frac{y}{x}, \quad y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

a equação (9) pode ser transformada em uma equação diferencial separável

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$$

Solução Esta equação não é separável, mas ela é homogênea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy} = 2(\frac{x}{y}) + \frac{3}{2}(\frac{y}{x})$$

Vamos substituir $y = vx$, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$, $v = \frac{y}{x}$ e $\frac{1}{v} = \frac{x}{y}$.
Isto fornece

$$x\frac{dv}{dx} = 2(\frac{1}{v}) + \frac{3}{2}(v) - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 + 4}{2v}$$

$$\int \frac{2v}{v^2 + 4}dv = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln\left(v^2 + 4\right) = \ln|x| + C_1$$

$$\ln\left(v^2 + 4\right) = \ln|x| + \ln C$$

$$v^2 + 4 = C|x|$$

como $v = \frac{y}{x}$, temos

$$(\frac{y}{x})^2 + 4 = C|x|$$

$$y^2 + 4 = Cx^3$$

porque o sinal de x pode ser absorvido pela constante arbitrária C.

Outra Maneira de Definir Equações Homogêneas

Definição: Função Homogênea

Se uma função f satisfaz

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para algum número real n, então dizemos que f é uma função homogênea de grau n.

Exemplos:
A função $M(x, y) = 4x^2 + 3y^2$ e $N(x, y) = -2xy$ são funções homogêneas de grau 2.
De fato
$M(tx, ty) = 4(tx)^2 + 3(ty)^2 = t^2(4x^2 + 3y^2) = t^2 M(x, y)$
$N(tx, ty) = -2txty = t^2(-2xy) = t^2 N(x, y)$

Definição: Equação Homogênea
Se uma equação diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é dita ser homogênea se ambos os coeficientes $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções homogêneas do mesmo grau.

A equação diferencial $2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$ é homogênea de grau 2. De fato, excreva a equação $2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$ da seguinte forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$$

$$(2xy)\, dy = \left(4x^2 + 3y^2\right) dx$$

$$\left(4x^2 + 3y^2\right) dx + (-2xy)\, dy = 0$$

Como as funções $M(x, y) = 4x^2 + 3y^2$ e $N(x, y) = -2xy$ são funções homogêneas de grau 2, então a equação é homogênea de grau 2.

Método de Solução

Se $f(x, y)$ for uma equação homogênea de grau n, note que poderemos escrever

$$f(x, y) = x^n f(1, \frac{y}{x}) \quad e \quad f(x, y) = y^n f(\frac{x}{y}, 1),$$

em que $f(1, \frac{y}{x})$ e $f(\frac{x}{y}, 1)$ são ambas homogêneas de grau zero.

Uma equação diferencial homogênea $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ pode ser resolvida por meio de uma substituição algébrica. Especificamente, a substituição $y = ux$ ou $x = vy$, em que u e v são novas variáveis independentes, transformará a equação em uma equação diferenciável de primeira ordem separável. Para ver isso, seja $y = ux$; então, sua diferencial $dy = udx + xdu$. Substituindo em , temos

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)\,[udx + xdu] = 0.$$

Agora, pela propriedade de homogeneidade dada em , podemos escrever

$$x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)\left[udx + xdu\right] = 0.$$

$$x^n\left[M(1,u) + uN(1,u)\right]dx + x^{n+1}N(1,u)du = 0.$$

$$\frac{1}{x}dx = -\frac{N(1,u)}{\left[M(1,u) + uN(1,u)\right]}du$$

EXEMPLO 2

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

Seja $y = ux$, então $dy = udx + xdu$ e $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. Substituindo acima, temos

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u^4x^4 + x^4}{xu^3x^3}$$
$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u^4 + 1}{u^3}$$
$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u^4 + 1}{u^3} - u$$
$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u^4 + 1 - u^4}{u^3}$$
$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^4 + 1}{u^3}$$
$$\frac{u^3}{u^4 + 1}du = \frac{1}{x}dx$$
$$\frac{1}{4}\ln\left|u^4 + 1\right| = \ln|x| + c$$

$$\frac{1}{4}\ln\left\{u^4 + 1\right\} = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln\left\{u^4 + 1\right\} = \ln|Cx|^4$$

$$u^4 + 1 = (Cx)^4$$

Como $y = ux$, temos que $u = \frac{y}{x}$, logo a família de soluções torna-se

$$\frac{y^4}{x^4} + 1 = (Cx)^4$$

$$y^4 = C_1x^8 - x^4, \quad C_1 = C^4$$

2.3 Equações Exatas

Uma equação diferencial de primeira ordem $M\,(x,y)\,dx + N\,(x,y)\,dy = 0$ é exata se existe uma função $f(x,y)$ tal que

(10) $$d\,(f(x,y) = M\,(x,y)\,dx + N\,(x,y)\,dy$$

Você deve se lembrar do Cáclulo Diferencial e Integral II que, se $z = f(x,y)$ é uma função com derivadas parciais contínuas em uma região retangular $R = (a,b) \times (c,d)$ do plano xy, então sua **diferencial total** é

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y)\,dy.$$

Agora se $f(x,y) = C$, segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y)\,dy = 0$$

Em outras palavras, dada uma família de curvas $f(x,y) = C$, podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem, calculando a diferencial total.

EXEMPLO 1

A equação diferencial

$$y^3dx + 3xy^2dy = 0$$

é exata?

Solução Sim, pois a função $f(x,y) = xy^3$ tem a propriedade de que $\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = y^3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = 3xy^2$. Assim a solução geral da equação é

$$xy^3 = C.$$

Critério para Exatidão

Suponha que as funções $M(x,y)$ *e* $N(x,y)$ são contínuas e têm derivadas de parciais de primeira ordem contínuas num retângulo aberto $R = (a,b) \times (c,d)$ do plano xy. Então a equação diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é exata em R, se e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função $f(x,y)$ definida em R com $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$, se e somente se a $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ vale em R.

Método de Solução

Dada a equação

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

verifique se ela é exata, isto é,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Depois suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$$

daí podemos encontrar f integrando $M(x,y)$ com relação a x, considerando y como constante.

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y),$$

em que a função arbitrária $g(y)$ é a constante de integração. Queremos encontrar quem é função $g(y)$, para isso

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y),$$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx,$$

$$g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right) dy.$$

Portanto a solução para

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right) dy.$$

O mesmo pode ser feito supondo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

daí podemos encontrar f integrando $N(x,y)$ com relação a y, considerando x como constante.

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h(x),$$

em que a função arbitrária $h(x)$ é a constante de integração. Queremos encontrar quem é função $h(x)$, para isso

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy + h'(x),$$

$$h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy,$$

$$h(x) = \int \left(M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy \right) dx.$$

Portanto a solução para

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \int \left(M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy \right) dx.$$

EXEMPLO 2

Resolva a equação diferencial

$$(y\cos(x) + 2xe^{y})\,dx + \left(sen(x) + x^2e^{y} - y\right)dy = 0 \tag{11}$$

Ela é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \cos(x) + 2xe^{y}$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \cos(x) + 2xe^{y}$$

Integrando $M(x,y)$ com relação a x, considerando y como constante.

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y),$$

$$f\left(x,y\right)=\int\left(y\cos(x)+2xe^{y}\right)dx+g\left(y\right),$$

$$f\left(x,y\right)=y\ sen(x)+x^{2}e^{y}+g\left(y\right),$$

Queremos encontrar quem é função $g(y)$, para isso

$$N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\int M\left(x,y\right)dx+g'\left(y\right),$$

$$g'\left(y\right)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y\ sen(x)+x^{2}e^{y}\right),$$

$$g'\left(y\right)=sen(x)+x^{2}e^{y}-y-\frac{\partial}{\partial y}\left(y\ sen(x)+x^{2}e^{y}\right),$$

$$g'\left(y\right)=sen(x)+x^{2}e^{y}-y-sen(x)-x^{2}e^{y},$$

$$g\left(y\right)=\int\left(-y\right)dy.=-\frac{y^{2}}{2}+c_{1}$$

Portanto a solução para (11) é

$$f\left(x,y\right)=y\ sen(x)+x^{2}e^{y}-\frac{y^{2}}{2}+c_{1}$$

ou seja, a família de soluções da eq. dif. é

$$y\ sen(x)+x^{2}e^{y}-\frac{y^{2}}{2}=C$$

EXEMPLO 2

Se a equação diferencial não for exata, não podemos utilizar o método descrito acima. Vamos verificar está afirmação tentando resolver a equação diferencial

$$(3xy+y^{2})+(x^{2}+xy)y'=0$$

$$(3xy+y^{2})dx+(x^{2}+xy)dy=0$$

Supondo que $M\left(x,y\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, temos

$$f(x,y)=\int(3xy+y^{2})dx+g\left(y\right),$$

onde $g(y)$ é uma função que depende somente de y,

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2y + xy^2 + g(y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + g'(y) = N(x,y) = x^2 + xy,$$

$$g'(y) = x^2 + xy - \frac{3}{2}x^2 - 2xy,$$

$$g'(y) = -\frac{1}{2}x^2 - xy,$$

chegamos num absurdo, $g(y)$ está dependendo de x e y.

2.3.1 Exercícios

I) Verifique se as equação diferenciais seguintes são exatas, e resolva as que o forem

1. $(2xy + x)\,dx + (x^2 + y)\,dy = 0$
2. $(ye^{xy})\,dx + (xe^{xy})\,dy = 0$
3. $(xe^{xy})\,dx + (ye^{xy})\,dy = 0$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^4 + x^4}{4xy^3}$
5. $(2x + 3) + (2y - 2)\,y' = 0$

Fator Integrante Algumas vezes, é possível converter uma equação diferencial não exata em uma equação exata multiplicando-a por uma função $\mu(x,y)$ chamada **fator integrante.**

EXEMPLO 1

A equação diferencial não é exata

$$(x+y)dx + x\ln(x)dy = 0.$$

De fato, $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \ln(x) + 1.$

Agora, vamos multiplicar pela $\mu(x,y) = \frac{1}{x},\ \ x > 0,$

$$\mu\left(x,y\right)(x+y)dx+\mu\left(x,y\right)x\ln(x)dy=0.$$

$$\frac{1}{x}(x+y)dx+\frac{1}{x}x\ln(x)dy=0.$$

$$(1+\frac{y}{x})dx+\ln(x)dy=0.$$

Agora a nova equação é exata, de fato, $\frac{\partial M}{\partial y}\left(x,y\right)=\frac{1}{x}=\frac{\partial N}{\partial x}\left(x,y\right).$
Supondo que $M\left(x,y\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, temos

$$f(x,y)=\int(1+\frac{y}{x})dx+g\left(y\right),$$

onde $g\left(y\right)$ é uma função que depende somente de y,

$$f(x,y)=x+y\ln(x)+g\left(y\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\ln(x)+g'\left(y\right)=N\left(x,y\right)=\ln(x)$$

$$g'\left(y\right)=0,$$

$$g\left(y\right)=C,$$

Portanto

$$f(x,y)=x+y\ln(x)+C,$$

EXEMPLO 1

A equação diferencial não é exata

$$(y)dx+\sec(x)dy=0.$$

De fato, $\frac{\partial M}{\partial y}\left(x,y\right)=1\neq\frac{\partial N}{\partial x}\left(x,y\right)=\sec(x)\tan(x).$

Agora, vamos multiplicar pela $\mu\left(x,y\right)=\frac{1}{y\sec(x)},\ \ y>0,$

$$\mu\left(x,y\right)(x+y)dx+\mu\left(x,y\right)x\ln(x)dy=0.$$

$$\frac{1}{y\sec(x)}(y)dx + \frac{1}{y\sec(x)}\sec(x)dy = 0.$$

$$\frac{1}{\sec(x)}dx + \frac{1}{y}dy = 0.$$

Agora a nova equação é exata, de fato, $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$.
Supondo que $M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, temos

$$f(x, y) = \int \frac{1}{\sec(x)}dx + g(y),$$

onde $g(y)$ é uma função que depende somente de y,

$$f(x, y) = sen(x) + g(y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 + g'(y) = N(x, y) = \frac{1}{y}$$

$$g'(y) = \frac{1}{y},$$

$$g(y) = \ln(y) + C,$$

Portanto

$$f(x, y) = sen(x) + \ln(y) + C.$$

O fator de integração destes dois exemplos foram obtidos por um palpite sensato.

Vamos tentar encontrar uma método para encontrar a $\mu(x, y)$.

Bom, depois de multiplicarmos a equação

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{12}$$

por $\mu(x, y)$

$$\mu(x, y)\,M(x, y)\,dx + \mu(x, y)\,N(x, y)\,dy = 0, \tag{13}$$

ela torna-se exata. Então temos

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)\,M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)\,N(x, y)]$$

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\,\mu = 0 \tag{14}$$

Se for possível encontrar uma função $\mu\,(x, y)$ satisfazendo a equação (14), então a equação (13) vai ser exata. A equação diferencial parcial (14) pode ter mais de uma solução; se for este o caso, qualquer uma das soluções podem ser usada como fator integrante. Infelizmente, determinar o fator integrante é, em geral, pelo menos tão díficil de resolver quanto a equação original. Mas se a equação $M\,(x, y)\,dx + N\,(x, y)\,dy = 0$ tem um fator de integração μ que é uma função apenas de x ou apenas de y, a equação (14), torna-se mais simples. Por exemplo, vamo supor que μ é uma função apenas de x, então

$$-N\mu_x + (M_y - N_x)\,\mu = 0$$

$$-N\frac{d\mu}{dx} + (M_y - N_x)\,\mu = 0$$

$$-Nd\mu = -\,(M_y - N_x)\,\mu dx$$

$$\frac{1}{u}d\mu = \frac{(M_y - N_x)}{N}dx$$

$$\ln|\mu| = \int\frac{(M_y - N_x)}{N}dx$$

$$\mu\,(x) = e^{\int\frac{(M_y - N_x)}{N}dx}$$

Se μ for uma função apenas de y,

$$\mu\,(y) = e^{\int\frac{(N_x - M_y)}{M}dy}$$

EXEMPLO 1

A equação diferencial não é exata

$$(x + y)dx + x\ln(x)dy = 0.$$

De fato, $\frac{\partial M}{\partial y}\,(x, y) = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x}\,(x, y) = \ln(x) + 1.$

Agora, vamos encontrar $\mu\,(x)\,,$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(M_y - N_x)}{N} dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(1-\ln(x)-1)}{x\ln(x)} dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx}$$

$$\mu(x) = e^{-\ln(x)}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{x}$$

$$\mu(x)(x+y)dx + \mu(x)\, x\ln(x)dy = 0.$$

$$\frac{1}{x}(x+y)dx + \frac{1}{x}x\ln(x)dy = 0.$$

$$(1+\frac{y}{x})dx + \ln(x)dy = 0.$$

Agora a nova equação é exata, de fato, $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$.

I) Mostre que as equações abaixo não são exatas, mas tonam-se exatas ao serem multiplicadas por um fator integrante. Depois resolva as equaçoes.

1. $(x^2y)\,dx + x(1+y^2)\,dy = 0, \quad \mu(x,y) = \frac{1}{xy^3}$
2. $(y)\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0, \quad \mu(x,y) = y$
3. $(x+2)\,sen(y)dx + (x\cos(y))\,dy = 0, \quad \mu(x,y) = xe^x$

II) Nos problemas abaixo, encontre um fator integrante e resolva as equaçoes.

Use $\mu(y) = e^{\int \frac{(N_x - M_y)}{M} dy}$ ou $\mu(x) = e^{\int \frac{(M_y - N_x)}{N} dx}$

1. $(y)\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0,$
2. $(x+2)\,sen(y)dx + (x\cos(y))\,dy = 0,$
3. $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0,$

2.4 Equações Lineares

Na seção 1, definimos a forma geral para uma equação diferencial linear de ordem n como, uma equação diferencial que pode ser escrita na forma
$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$
onde
(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cadaq termo envolvendo y é 1.
(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável indenpendente x.

Equação Diferencial Linear de $1^{a.}$ Ordem

Uma equação diferencial que pode ser escrita na forma
$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$
é chamada de equação linear.

Como $a_1(x) \neq 0$, podemos dividir a equação $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ por ele, obtendo uma forma mais útil de uma equação linear

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{15}$$

$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$.

Fator Integrante

Usando diferenciais, podemos escrever a equação (15) como

$$dy + (P(x)y - Q(x))\,dx = 0,$$

Equações lineares possuem a agradável propriedade através da qual podemos sempre encontrar uma função $\mu(x)$. Supondo μ é uma função apenas de x, então

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$

$$\mu(x)\,M(x,y)\,dx + \mu(x)\,N(x,y)\,dy = 0,$$

$$\mu(x)\,[(P(x)y - Q(x))]\,dx + \mu(x)\,dy = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(x\right)\left(P(x)y-Q\left(x\right)\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(x\right)$$

$$\mu\left(x\right)P(x)=\frac{d\mu}{dx}$$

$$\frac{1}{u}d\mu=P(x)dx$$

$$\ln\left|\mu\right|=\int P(x)dx$$

$$\mu\left(x\right)=e^{\int P(x)dx}$$

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}x}.$$

Seja a sua forma diferencial

$$dy+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}x}\right)dx=0,$$

Nõa é exata, de fato, $\frac{\partial M}{\partial y}\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\left(x,y\right)=0$. Agora vamos encontrar o fator integrante

$$\mu\left(x\right)=e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu\left(x\right)=e^{\int\frac{1}{2}dx}$$

$$\mu\left(x\right)=e^{\frac{1}{2}x}$$

multiplicando a equação pelo fator integrante, temos

$$e^{\frac{1}{2}x}dy+e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}x}\right)dx=0,$$

que é uma equação exata. De fato, $\frac{\partial M}{\partial y}\left(x,y\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\frac{\partial N}{\partial x}\left(x,y\right).$
Supondo que $N\left(x,y\right)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, temos

$$f(x,y) = \int e^{\frac{1}{2}x} dy + g(x),$$

onde $g(y)$ é uma função que depende somente de y,

$$f(x,y) = e^{\frac{1}{2}x} y + g(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} y + g'(x) = M(x,y) = \frac{1}{2} y e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{3}x} e^{\frac{1}{2}x}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{5}{6}x},$$

$$g(x) = -\frac{3}{5} e^{\frac{5}{6}x} + C,$$

Portanto

$$f(x,y) = e^{\frac{1}{2}x} y - \frac{3}{5} e^{\frac{5}{6}x} + C.$$

EXEMPLO 2

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}, \quad y(0) = 3.$$

Seja a sua forma diferencial

$$dy + \left(-3y - e^{2x}\right) dx = 0,$$

Não é exata, de fato, $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -3 \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 0$. Agora vamos encontrar o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int -3dx}$$

$$\mu(x) = e^{-3x}$$

multiplicando a equação pelo fator integrante, temos

$$e^{-3x}dy + e^{-3x}\left(-3y - e^{2x}\right)dx = 0,$$

que é uma equação exata. De fato, $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -3e^{-3x} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$.
Supondo que $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, temos

$$f(x,y) = \int e^{-3x}dy + g(x),$$

onde $g(y)$ é uma função que depende somente de y,

$$f(x,y) = e^{-3x}y + g(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3e^{-3x}y + g'(x) = M(x,y) = e^{-3x}\left(-3y - e^{2x}\right)$$

$$g'(x) = -e^{-x},$$

$$g(x) = e^{-x} + C_1,$$

Portanto

$$f(x,y) = e^{-3x}y + e^{-x} + C_1,$$

$$f(x,y) = C,$$

$$e^{-3x}y + e^{-x} + C_1 = C,$$

$$e^{-3x}y = C - e^{-x} - C_1,$$

$$y = C_2e^{3x} - e^{2x}, \quad C_2 = C - C_1,$$

A condição incial $y(0) = 3$, produz

$$3 = y(0) = C_2e^0 - e^0,$$

$$3 = C_2 - 1,$$

$$C_2 = 4,$$

Portanto a solução para PVI é

$$y = 4e^{3x} - e^{2x}.$$

I) Resolva as equações diferenciais.

1. $(y - 2)\,dx + dy = 0$,
2. $y' - 2y = 3e^{2x}$,
3. $\frac{dy}{dx} + 3y = 2xe^{-3x}$,
4. $y' + 3y = x + e^{-2x}$,
5. $\frac{dy}{dx} - y = senh(x)$,
6. $xy' + 2y = e^{x} + \ln(x)$,

II) Nos problemas abaixo, encontre a solução para o PVI.

1. $x\frac{dy}{dx} + 2y = sen(x),\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,
2. $(-y - 2xe^{2x})\,dx + dy = 0, y\,(0) = 1$,
3. $x^3y' + 4x^2y = e^{-x}, y\,(-1) = 0$,
4. $\frac{dy}{dx} + 5y = 20,\ y\,(0) = 2$,

Referências Bibliográficas

[1] BOYCE-DI PRIMA Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1997.

[2] EDWARDS, C.H. e PENNEY, D.E. Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno. Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1995.

[3] BRAUN, M. Equações Diferenciais e suas Aplicações. Rio de Janeiro, Campus, 1979.

[4] FIGUEIREDO, D.G. e NEVES, A.F. Equações Diferenciais Aplicadas. IMPA, 1997.

[5] SANTOS, R. J. Introdução às equações diferenciais ordinárias, Departamento de Matemática-ICEx Universidade Federal de Minas Gerais. http://www.mat.ufmg.br/ regi/eqdif/iedo.pdf

[6] Zill, D.G. e Cullen, M.R. Equações Diferenciais, Volume 1. Terceira EdiçãoPearson Makron Books,2001.