Sumário

Marcela L. V. de Souza e Osmar Aléssio

ÁLGEBRA LINEAR COM O MATHEMATICA

Notas de Aula

Rascunho de uma versão preliminar

04 de Fevereiro de 2009

Capítulo 1

SISTEMAS LINEARES, MATRIZES E DETERMINANTES

1.1 Considerações Iniciais

1.1.1 Conjuntos Numéricos

Ao longo do curso, utilizaremos os conjuntos numéricos a seguir.
Números Naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$
Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Números Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\right\}$
Números Reais: O conjunto dos números reais será denotado por $\mathbb{R}$.

Quando quisermos indicar os subconjuntos de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ excluindo-se o número 0, indicaremos por $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$ e $\mathbb{R}^*$, respectivamente.

1.1.2 Números Complexos

O conjunto dos **números complexos** é o conjunto

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$

munido das operações de soma e produto definidas a seguir, onde x é a parte real, y é a parte imaginária e $i = \sqrt{-1}$.
Dados dois números complexos $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$, definimos:

Soma: $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Produto: $z.w = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

Caso particular: $i^2 = i.i = -1$

Nomenclatura:

1) O elmento i é chamado de **imaginário puro**.
2) Se $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos $a = \mathrm{Re}(z)$ (a parte real de z) e $b = \mathrm{Im}(z)$ (a parte imaginária de z). Assim: $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i$.

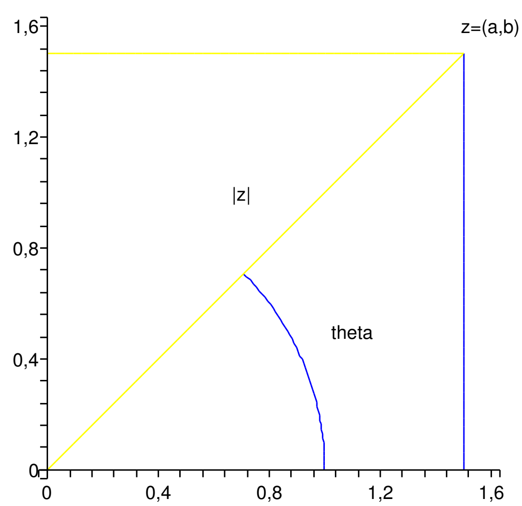
Representação geométrica:

Podemos representar os números complexos geometricamente como pontos de um plano. Munimos o plano $\mathbb{R}^2$ de maneira usual com os eixos cartesianos e identificamos o número complexo $z = a + bi$ com o ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Usando coordenadas polares, ainda obteremos: para $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, teremos que $a = r\cos\theta$ e $b = r\ sen\theta$, onde r é a distância da origem do plano ao ponto (a, b) e θ indica o ângulo formado entre o eixo Ox e a reta que passa pela origem do plano e por (a, b).
O **módulo** de um número complexo z é definido como sendo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A representação polar de um número complexo não nulo z será então

$$z = r\cos + i\ rsen\theta = r\ e^{i\theta},\ \text{onde } r = |z|\,.$$



O **conjugado complexo** de $z = a + bi$ é definido como sendo $\overline{z} = a - bi$. Na forma polar, se $z = re^{i\theta}$ então $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Geometricamente, considerar o conjugado de um número complexo corresponde a refleti-lo em relação ao eixo real Ox.

1.1.3 Corpos

Um dos objetivos deste curso é desenvolver o conceito de espaço vetorial sobre corpos arbitrários. Para isso, precisamos da seguinte definição.

Definição Um conjunto não vazio $\mathbb{k}$ (ou F) é um **corpo** se em $\mathbb{k}$ pudermos definir duas operações, denotadas por $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação):
Adição: associa, a cada par $a, b \in \mathbb{k}$, um elemento $a + b \in \mathbb{k}$
Multiplicação: associa, a cada par $a, b \in \mathbb{k}$, um elemento $a \cdot b \in \mathbb{k}$,
satisfazendo as seguintes propriedades:

(A1) $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{k}$ (comutativa da adição)
(A2) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{k}$ (associativa da adição)
(A3) Existe um elemento em $\mathbb{k}$, denotado por 0, que satisfaz $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{k}$ (elemento neutro da adição)
(A4) Para cada $a \in \mathbb{k}$, existe um elemento em $\mathbb{k}$, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (oposto aditivo ou inverso aditivo de a)
(M1) $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{k}$ (comutativa da multiplicação)
(M2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{k}$ (associativa da multiplicação)
(M3) Existe um elemento em $\mathbb{k}$, denotado por 1, que satisfaz $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{k}$ (elemento neutro da multiplicação)
(M4) Para cada elemento não nulo $a \in \mathbb{k}$, existe um elemento em $\mathbb{k}$, denotado por a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (inverso multiplicativo de a)
(D) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{k}$ (distributiva da multiplicação com relação à adição)

A notação do produto $a \cdot b$ poderá ser simplesmente denotada por ab.

EXEMPLOS.

(1) São exemplos de corpos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

(2) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não é um corpo. (Justifique.)

(3) Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ o conjunto formado pelos elementos $a + b\sqrt{2}$ com $a, b \in \mathbb{Q}$. Dados $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, defina a soma e o produto, respectivamente, como:
Soma: $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
Produto: $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo (Verifique. Em particular, determine o inverso de um elemento $a + b\sqrt{2} \neq 0$ em $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$).

(4) Seja m um inteiro positivo não nulo e defina as seguintes operações no conjunto $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$:
Adição: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$, onde c é o resto da divisão de $a + b$ por m.
Multiplicação: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{d}$, onde d é o resto da divisão de $a \cdot b$ por m.
Temos que $\mathbb{Z}_m$ é um corpo se, e somente se, m for um número primo. Em particular, $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{43}$ são exemplos de corpos, enquanto $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_{45}, \mathbb{Z}_{3600}$ não são. Obtemos assim exemplos de conjuntos finitos que são corpos.

1.2 Sistemas Lineares

Sabemos que muitos problemas práticos podem ser equacionados em termos de sistemas lineares. Nesta primeira seção, introduziremos alguma terminologia básica importante para o desenvolvimento de tal teoria.

1.2.1 Equação lineares

Definição DEFINIÇÃO.
Qualquer linha reta no plano xy pode ser representada algebricamente por uma equação da forma

$$a_1x + a_2y = b$$

onde a_1, a_2 e b são constantes reais e a_1 e a_2 não são ambas nulas.
Uma equação desta forma é chamada uma **equação linear** nas variáveis x e y.
Mais geralmente, definimos uma **equação linear** nas n variáveis $x_1, ..., x_n$ como uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

onde:
$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as **variáveis** ou **incógnitas**
$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são os respectivos **coeficientes das variáveis**
b é o **termo independente.**
Os coeficientes $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e o termo independente b são números reais ou complexos.

Observação: uma equação linear não envolve quaisquer produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais.

EXEMPLOS.

1) As equações

$$x + 3y = 7,\ \ y = \frac{1}{2}x + 3z + 1,\ \ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7 \text{ e } x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$$

são lineares.

2) As equações

$$x + 3\sqrt{y} = 5,\ \ 3x + 2y - z + xz = 4 \ \text{ e } \ y = sen\ x$$

são não-lineares.

Solução de uma equação linear

Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em identidade, ou seja, que satisfazem à equação, constituem sua solução. Esses valores são denominados **raízes** da equação linear. Portanto, uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ é uma sequência de n números $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tais que a equação é satisfeita quando substituímos $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$. O conjunto de todas as soluções de uma equação é chamado seu **conjunto-solução** ou, às vezes, a **solução geral** da equação.

EXEMPLOS.

Encontre o conjunto-solução de

(a) $4x - 2y = 1$
(b) $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$

1.2.2 Sistema de Equações Lineares

Definição DEFINIÇÃO.
Seja $\Bbbk$ um corpo. Um **sistema de equações lineares** com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações lineares

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \Bbbk$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Da mesma forma que vimos anteriormente, dizemos que $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as **variáveis** ou **incógnitas** do sistema e $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, ..., a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}$ são os **coeficientes** das equações.
Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares.

Solução de um sistema linear

Denomina-se **solução do sistema** S a n-upla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de elementos de $\mathbb{k}$ que satisfaz simultaneamente as m equações:

$$S : \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = y_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + ... + a_{mn}\alpha_n = y_m \end{cases}$$

Se $y_1 = y_2 = ... = y_m = 0$, dizemos que o sistema é **homogêneo**. A n-upla $(0, 0, ..., 0)$ sempre é solução de um sistema homogêneo e é denominada **solução zero** ou **solução trivial**. Qualquer outra solução, se existir, é dita **não trivial** (ou **própria**).
Uma possível estratégia para resolver esse sistema é por meio do processo de escalonamento que veremos logo a seguir. Mais adiante estudaremos também outros métodos para determinar a solução de um sistema de equações lineares.

EXEMPLO.

O sistema

$$S : \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases}$$

tem a solução $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$, pois estes valores satisfazem ambas equações. No entanto, $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 1$ não é uma solução do sistema, pois estes valores satisfazem apenas a primeira das duas equações do sistema.

Classificação de um sistema linear

Podemos classificar um sistema linear conforme seu tipo de solução.

1°) Um sistema S é **compatível** (ou **possível** ou **consistente**) e **determinado** se ele admitir uma única solução.

2°) Um sistema S é **compatível** (ou **possível** ou **consistente**) e **indeterminado** se ele admitir várias (infinitas) soluções.

3°) Um sistema S é **incompatível** (ou **impossível** ou **inconsistente**) se ele não admitir solução.

Para ilustrar as possibilidades que podem ocorrer na resolução de sistemas de equações lineares, considere um sistema arbitrário de duas equações lineares em $\mathbb{R}$ nas incógnitas x e y :

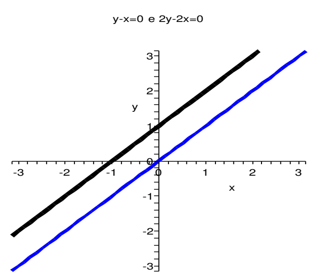
$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

onde a_1, b_1 não são ambas nulas e a_2, b_2 também não são ambas nulas.

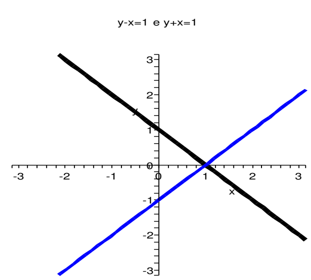
É fácil determinar o conjunto solução de um sistema linear de duas equações porque é equivalente a determinar a interseção de duas retas.

Os gráficos destas equações são retas, digamos l_1 e l_2. Como um ponto (x, y) está na reta se, e somente se, os números x e y satisfazem a equação da reta, as soluções do sistema de equações correspondem a pontos de interseção de l_1 e l_2. Assim, existem 3 possibilidades:

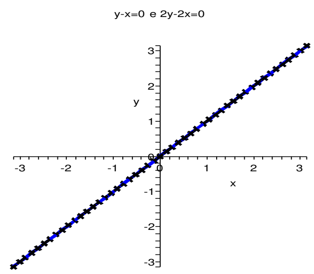
1^a) As retas l_1 e l_2 podem ser paralelas, caso em que não há interseção e consequentemente não existe nenhuma solução do sistema.



2^a) As retas l_1 e l_2 podem cortar-se em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.



3^a) As retas l_1 e l_2 podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de soluções do sistema.



EXEMPLOS.

1) $S : \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$
é um sistema possível e determinado.

2) $S : \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$
é um sistema possível e indeterminado.

3) $S : \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$
é um sistema impossível.

Exercício: Faça o gráfico das retas de cada exemplo anterior para ilustrar a solução do sistema correspondente.

Exercício: Classifique os seguintes sistemas lineares e esboce as retas num mesmo plano para cada sistema.

(a) $S : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$

(b) $S : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

(c) $S : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

1.3 Equivalência de Sistemas Lineares

Nosso objetivo nesta seção é transformar um sistema complicado S num sistema mais simples S'. Mais especificamente, após efetuarmos operações elementares nas equações de um sistema S, vamos obter um outro sistema S' que seja mais fácil de resolver e que tenha o mesmo conjunto de soluções.

Definição
Dizemos que dois sistemas S e S' de equações lineares a n incógnitas são **equivalentes** quando admitem a mesma solução.
Notação: $S \sim S'$

Exemplo:

Os sistemas $S : \begin{cases} 3x + 6y = 42 \\ 2x - 4y = 12 \end{cases}$ e $S' : \begin{cases} x + 2y = 14 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ são equivalentes, pois admitem a mesma solução: $x = 10$ e $y = 2$. (Verifique!)

Observação: Para a relação $\sim$ assim definida valem as seguintes propriedades:

(a) $S \sim S$ (reflexiva)
(b) $S \sim S' \Rightarrow S' \sim S$ (simétrica)
(c) $S' \sim S$ e $S \sim S'' \Rightarrow S' \sim S''$ (transitiva)

Logo, se $S' \sim S$, então toda solução de S é solução de S' e vice-versa. Em particular, se S' é incompatível, o mesmo ocorre com S.

Operações Elementares e Sistemas Equivalentes

Um sistema de equações lineares se transforma num sistema equivalente quando se efetuam as seguintes operações:

I) Permutação de duas equações.
II) Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo.
III) Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um escalar não nulo.

Estas operações são chamadas de **operações elementares**.

Por meio dessas operações elementares, pode-se transformar um sistema complicado S num sistema mais simples de ser resolvido, S'.

Exercício: Mostre que efetuar operações elementares em um sistema linear produz um sistema linear equivalente.

Notações das Operações Elementares

Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$S : \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 10 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \end{cases}$$

Adotaremos as notações abaixo para as operações elementares:

1^a) $L_{23} \rightarrow$ permutação da 2^a equação pela 3^a de um sistema de equações lineares

$$S : \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 10 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \end{cases} \xrightarrow{L_{23}} S_1 : \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 10 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \end{cases}$$

2^a) $L_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow$ multiplicação da 1^a equação por $\frac{1}{2}$

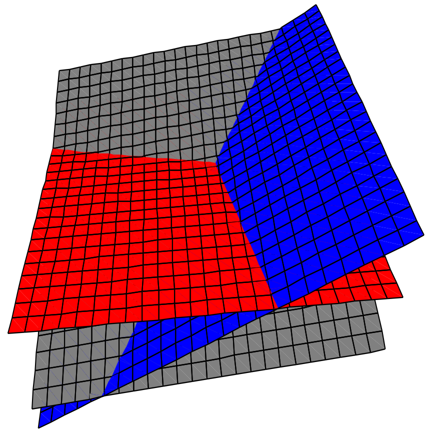
$$S_1 : \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 10 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} S_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \end{cases}$$

3^a) $L_2 = L_2 + L_1 \cdot (-2) \rightarrow$ substituição da 2^a linha por sua soma com a 1^a linha previamente multiplicada por -2

$$S_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \end{cases} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1 \cdot (-2)} S_3 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 0x + 4y + 2z = 14 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \end{cases}$$

Temos que $S \sim S_1 \sim S_2 \sim S_3$ e então todos os sistemas S, S_1, S_2 e S_3 têm a mesma solução: $x = 2$, $y = 3$ e $z = 1$. (Verifique!)

Veja a interseção dos três planos na figura abaixo



1.4 Escalonamento de Sistemas Lineares, Discussão e Resolução

1.4.1 Sistemas Escalonados

DEFINIÇÃO.

Um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$S : \begin{cases} a_{1r_1}x_{r_1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2r_2}x_{r_2} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{kr_k}x_{r_k} + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ 0x_n = b_{k+1} \end{cases}$$

será chamado de **escalonado** se tivermos $a_{1r_1} \neq 0$, $a_{2r_2} \neq 0, \dots, a_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$, onde $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$.

É claro que se $b_{k+1} = 0$, a última equação de S pode ser eliminada do sistema. Logo, num sistema escalonado o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na precedente.

EXEMPLO.

O seguinte sistema

$$S : \begin{cases} 2x - y - z - 3t = 0 \\ z - t = 1 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

é escalonado.

O seguinte resultado é o fato mais importante de sistemas escalonados.

PROPOSIÇÃO.

Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.

Desta forma, para a resolução de um sistema linear, basta sabermos lidar com os sistemas escalonados, para assim reduzir um sistema qualquer a um escalonado. Vamos então aplicar o método de escalonamento no exemplo a seguir.

EXEMPLO.

Escalone o seguinte sistema

$$S : \begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$$

Observação: É claro que equações do tipo $0 = 0$ que aparecerem no processo de escalonamento devem ser suprimidas.

1.4.2 Discussão e Resolução de um Sistema Linear

DISCUTIR um sistema linear S significa efetuar um estudo de S visando a classificá-lo em compatível determinado, compatível indeterminado ou incompatível.
RESOLVER um sistema linear significa determinar todas as suas soluções.

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Procedendo ao escalonamento de S chegaremos a uma das três seguintes situações:

(I) No processo de escalonamento, numa certa etapa, obtém-se um sistema:

$$S' : \begin{cases} \vdots \\ 0x_1 + ... + 0x_n = b_i \qquad (b_i \neq 0) \\ \vdots \end{cases}$$

Como S' é incompatível (justifique), então o mesmo se pode dizer de S.

(II) Obtém-se um sistema escalonado do seguinte tipo:

$$S' : \begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

Neste caso, S' poderá ser transformado, por equivalência, no seguinte sistema

$$S'' : \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

Logo, S é compatível determinado (justifique) e $(c_1, c_2, ..., c_n)$ é a sua solução.

EXEMPLO.

Discutir e resolver o seguinte sistema

$$S : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

(III) Obtém-se um sistema escalonado do tipo abaixo:

$$S' : \begin{cases} x_1 + ... + a_{1r_2}x_{r_2} + ... + a_{1r_3}x_{r_3} + ... + a_{1r_p}x_{r_p} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_{r_2} + ... + a_{2r_3}x_{r_3} + ... + a_{2r_p}x_{r_p} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ x_{r_3} + ... + a_{3r_p}x_{r_p} + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ x_{r_p} + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

onde $p < n$.

Neste caso, podemos eliminar por meio de operações elementares

- o termo em x_{r_2} na primeira equação.
- os termos em x_{r_3} da primeira e segunda equações.

  $\vdots$

- os termos em x_{r_p} da primeira à $(p-1)-$ésima equação.

Feito isto, passamos para o segundo membro de cada equação todas as parcelas, com exceção da primeira. Assim obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = f_1 \\ x_{r_2} = f_2 \\ \quad\vdots \\ x_{r_p} = f_p \end{cases}$$

onde cada f_i é uma expressão linear nas variáveis x_j com $j \neq 1$, $j \neq r_2, ..., j \neq r_p$. A cada sequência de valores dada para estas $n-p$ variáveis (variáveis livres) obteremos valores para x_1, x_{r_2}, ..., x_{r_p} e consequentemente uma solução do sistema. Como $p < n$, teremos mais do que uma solução (infinitas na verdade). Logo, neste caso temos um sistema indeterminado.

EXEMPLO.

Discutir e resolver o seguinte sistema

$$S : \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 7y = 3 \end{cases}$$

1.5 Matrizes

1.5.1 Definição e Exemplos

DEFINIÇÃO.

Sejam m, n dois inteiros positivos. Uma **matriz de ordem m por n** é um quadro de $m \cdot n$ elementos (números, polinômios, funções, etc) dispostos em m linhas e n colunas.

Notação: Tal matriz é denotada por letra maiúscula, subscrita com a dimensão (ou ordem) $m \times n$ (lê-se "m por n"). Assim:

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sendo a_{ij} o elemento ou entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna do quadro, isto é, o elemento de posição i, j da matriz A.

Os elementos de uma matriz são denominados **coeficientes**.

Pode-se dizer também que uma matriz é um conjunto de vetores, no caso de $A_{m\times n}$ são m vetores-linha de n coeficientes ou n vetores-coluna de m coeficientes.

A **i-ésima linha** de A é

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix},$$

para $i = 1, ..., m$ e a **j-ésima coluna** de A é

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix},$$

para $j = 1, ..., n$.

Dado um corpo $\mathbb{k}$, uma matriz de escalares m por n sobre $\mathbb{k}$ é dada por $m.n$ valores $a_{ij} \in \mathbb{k}$.

Notação: Neste caso denotamos por $M_{m\times n}(\mathbb{k})$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{k}$.

EXEMPLOS.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) (7)

(e) $\begin{pmatrix} 2+x & 5-z & 3 \\ 6 & y & -1 \\ -2 & 2+y & 3+x \end{pmatrix}$

(f) Considere o seguinte quadro de produção

Prod(t)/ano	2003	2004	2005	2006
Milho	5	4	6	4.5
Feijão	2	3	2.5	3
Arroz	0.5	1.5	1	2

Deste quadro, extrai-se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 4.5 \\ 2 & 3 & 2.5 & 3 \\ 0.5 & 1.5 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

que representa nas linhas a quantidade de cereal produzida e, nas colunas, o ano de produção. Temos: $A = A_{3\times 4}$, $a_{23} = 2.5$, $a_{34} = 2$, etc.

1.5.2 Tipos de matrizes

(I) Matriz retangular

Uma matriz $A_{m\times n}$ na qual $m \neq n$ é denominada **matriz retangular**.

Exemplo: $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 9 & 23 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

(II) Matriz-coluna

Uma matriz de ordem $n \times 1$ é uma **matriz-coluna**:

$$A_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Exemplo: $B_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

(III) Matriz-linha

A matriz de ordem $1 \times n$ é uma **matriz-linha**:

$$C_{1\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \end{pmatrix}$$

Exemplo: $C_{1\times 4} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(IV) Matriz quadrada

Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, tem-se uma **matriz quadrada**. A ordem da matriz quadrada é $n \times n$, ou simplesmente n.

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(a) Diagonal principal

Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, constituem a **diagonal principal**.

Assim, a diagonal formada pelos elementos

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$$

é a diagonal principal.

Exemplo: $B = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 0 & 1 & 3 \\ 9 & \mathbf{15} & 7 & 0 \\ 0 & -1 & \mathbf{4} & 8 \\ 5 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{4\times 4}$

(b) Diagonal secundária

Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i + j = n + 1$, constituem a **diagonal secundária**.

Assim, a diagonal formada pelos elementos

$$a_{1n}, a_{2\ n-1}, a_{3\ n-2}, ..., a_{n1}$$

é a diagonal secundária.

Exemplo: $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & \mathbf{3} \\ 9 & 15 & \mathbf{7} & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 4 & 8 \\ \mathbf{5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4}$

(V) Matriz diagonal

A matriz quadrada $A = (a_{ij})$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ é uma **matriz diagonal**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(VI) Matriz escalar

A matriz diagonal que tem os elementos a_{ij} iguais entre si para $i = j$ é uma **matriz escalar**.

Exemplo: $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(VII) Matriz unidade ou identidade

A matriz escalar de qualquer ordem que tem os elementos $a_{ij} = 1$ para $i = j$ é uma **matriz unidade** ou **identidade**.

Notação: I_n ou I

Exemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(VIII) Matriz zero ou nula

Uma **matriz zero** ou **nula** é a matriz cujos elementos a_{ij} são todos nulos.

Notação: $0_{n\times m}$

Exemplo: $0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(IX) Matriz triangular superior

A matriz quadrada $A = (a_{ij})$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$, é uma **matriz triangular superior**.

Exemplo: $A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Neste exemplo, temos que: $a_{21} = a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$.

(X) Matriz triangular inferior

A matriz quadrada $A = (a_{ij})$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$, é uma **matriz triangular inferior**.

Exemplo: $A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -9 \end{pmatrix}$

Neste exemplo, temos que: $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0$.

1.5.3 Operações com matrizes

1) Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são **iguais** se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i, j.

2) Produto de uma matriz por um escalar

Se K é um escalar e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma matriz, então o produto de A por esse escalar é a matriz

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij}),$$

ou seja, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por k :

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

EXEMPLO.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 15 \\ 9 & 21 & -6 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES.

I) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
II) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
III) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
IV) $1 \cdot A = A$

3) Adição de matrizes

A soma de duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$, é uma matriz $C = (c_{ij})$ dada por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Isto é, a soma de 2 matrizes é definida elemento a elemento.

EXEMPLOS.

a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -7 \\ 9 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 0 \\ 10 & 6 & 5 & -9 \\ 6 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

1.5.4 PROPRIEDADES.

I) $A + B = B + A$ (comutativa)
II) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)
III) $A + 0 = 0 + A = A$ (elemento neutro aditivo)
IV) $A - A = -A + A = 0$ (elemento oposto ou simétrico aditivo)

DEFINIÇÃO.

Dada a matriz $A = (a_{ij})$, chama-se **matriz oposta** de A a matriz B tal que $A + B = 0$. Logo, a matriz oposta de A é $B = -A = (-a_{ij})$.

Notação: $B = -A$

4) Subtração de matrizes

A diferença $A - B$ de duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$, é uma matriz $C = (c_{ij})$ dada por

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

EXEMPLOS.

a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 14 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

PROPRIEDADES.

I) $A(B-C) = AB - AC$ (distributiva)
II) $(B-C)A = BA - CA$ (distributiva)
III) $\lambda(B-C) = \lambda B - \lambda C$ (distributiva)
IV) $(\lambda - \mu)C = \lambda C - \mu C$ (distributiva)

5) Produto de matrizes

Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times p} = (b_{jk})$ duas matrizes cujo número de colunas n da primeira é igual ao número de linhas n da segunda. O **produto** de A por B é dado por

$$AB_{m\times p} = (c_{ik})$$

em que cada coeficiente c_{ik} é dado produto escalar de cada linha da primeira matriz por cada coluna da segunda matriz, ou seja,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}$$

O tamanho (ordem ou dimensão) da matriz produto é dado pelo número de linhas da primeira e pelo número de colunas da segunda.

Observação: Note que a definição de multiplicação de matrizes exige que o número de colunas do primeiro fator A seja igual ao número de linhas do segundo fator B para que seja possível formar o produto AB.Se esta condição não é satisfeita, o produto não está definido.

Maneira prática para determinar se o produto de duas matrizes está ou não definido. Escreva:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & & AB \\ m\times n & n\times p & = & m\times p \end{array}$$

Se os números internos coincidem, então o produto está definido. E os números externos nos dão a dimensão de AB.

MÉTODO PRÁTICO

Vejamos um método prático para multiplicar matrizes.
Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times p} = (b_{jk})$. O produto $AB = (c_{ik})$ é a matriz $m \times p$ cujas entradas são determinadas como segue.

Para obter a entrada na linha i e coluna k de AB, isto é, c_{ik} :

1^o) destaque a linha i de A e a coluna k de B
2^o) multiplique as entradas correspondentes desta linha e desta coluna
3^o) some os produtos resultantes

EXEMPLO.

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Então: $AB_{2\times 4} = (c_{ij})$

Cálculo de c_{23} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & \mathbf{4} & 3 \\ 0 & -1 & \mathbf{3} & 1 \\ 2 & 7 & \mathbf{5} & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & \mathbf{26} & - \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$c_{23} = (2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$

Cálculo de c_{14} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & \mathbf{3} \\ 0 & -1 & 3 & \mathbf{1} \\ 2 & 7 & 5 & \mathbf{2} \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} - & - & - & \mathbf{13} \\ - & - & - & - \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$c_{14} = (1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$

Cálculo das outras entradas:

$c_{11} = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) = 12$
$c_{12} = (1 \cdot 1) + [2 \cdot (-1)] + (4 \cdot 7) = 27$
$c_{13} = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) = 30$
$c_{21} = (2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) = 8$
$c_{22} = (2 \cdot 1) + [6 \cdot (-1)] + (0 \cdot 7) = -4$
$c_{24} = (2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) = 12$

Daí:

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

PROPRIEDADES.

I) Dadas as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times r}$, vale que: $(AB)C = A(BC)$ (associativa)
II) Dadas as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ e $C_{n\times p}$, vale que: $(A+B)C = AC+BC$ (distributiva em relação à adição)
III) Dadas as matrizes $A_{n\times p}$, $B_{n\times p}$ e $C_{m\times n}$, vale que: $C(A+B) = CA+CB$ (distributiva em relação à adição)
IV) Seja $A_{m\times n}$, daí: $I_mA = AI_n = A$ (elemento neutro)
V) Dadas as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, para todo número k, vale que: $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

Observações:

a) A multiplicação matricial não é, em geral, comutativa. Ou seja, em geral: $AB \neq BA$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 11 & 21 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 20 & 2 \\ 6 & 15 & 3 \\ 8 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Se $AB = 0$, não necessariamente, $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Se $AB = 0$ qualquer que seja B, então $A = 0$. Do mesmo modo, se $AB = 0$ qualquer que seja A, então $B = 0$.

Exercício: Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Calcule AB, BA, BC, CB, AC e CA, se possível.

6) Potência de uma matriz

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ pode ser multiplicada n vezes por si mesma. A matriz que resulta dessas operações, e que se representa por A^n, é chamada **potência n** da matriz A. De uma maneira mais formal, vamos definir potências de matrizes quadradas, discutir suas propriedades e dar exemplos.

DEFINIÇÃO.

Se A é uma matriz quadrada, definimos as **potências inteiras não-negativas** de A por

$$A^0 = I \quad \text{e} \quad A^n = \underbrace{AA...A}_{\text{n fatores}} \qquad (n > 0)$$

Como esta definição é idêntica à de potências de números reais, valem as leis usuais de expoentes.

TEOREMA. (Leis de expoentes)

Se A é uma matriz quadrada e r e s são inteiros, então

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

EXEMPLOS.

1) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. Então:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$

b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 42 \\ 84 & 83 \end{pmatrix}$

2) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. Determine A^2.

Expressões Polinomiais Envolvendo Matrizes

Se A é uma matriz quadrada, digamos $m \times m$ e se

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

é um polinômio qualquer, então definimos

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + ... + a_n A^n$$

onde I é a matriz identidade $m \times m$. Ou seja, $p(A)$ é a matriz $m \times m$ que resulta quando x é substituído por A e a_0 é substituído por $a_0 I$.

1.5.5 EXEMPLO.

Se

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 4 \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 4I = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

7) Função Traço

Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ uma matriz quadrada.
Definimos o **traço de** A, denotado por $tr\ A$, como sendo a soma dos elementos de sua diagonal principal, isto é,

$$tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

EXEMPLO.

$$tr \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ -2 & 11 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Terminaremos esta seção, fazendo a seguir um resumo das propriedades mais importantes da aritmética matricial.

TEOREMA. (Propriedades da Aritmética Matricial)

Supondo que as ordens das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(a) $A + B = B + A$
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$
(c) $A(BC) = (AB)C$
(d) $A(B + C) = AB + AC$
(e) $(A + B)C = AC + BC$

(f) $A(B - C) = AB - AC$
(g) $(B - C)A = BA - CA$
(h) $\lambda(B + C) = \lambda B + \lambda C$
(i) $\lambda(B - C) = \lambda B - \lambda C$
(j) $(\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C$
(k) $(\lambda - \mu)C = \lambda C - \mu C$
(l) $\lambda(\mu C) = (\lambda\mu)C$
(m) $\lambda(BC) = (\lambda B)C = B(\lambda C)$

1.5.6 Matrizes Especiais

Tendo explorado as operações matriciais, podemos ainda definir outros tipos de matrizes.

1) Matriz transposta

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denomina-se **transposta** de A a matriz $B = (b_{ji})_{n\times m}$, tal que $b_{ji} = a_{ij}$, para todo i, j, $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. Para determinar a matriz transposta da matriz A, basta trocar suas linhas por colunas ou suas colunas por linhas.
Notação: A^t ou A'

EXEMPLO.

Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$. A transposta de A é: $A^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.

PROPRIEDADES

I) $(A + B)^t = A^t + B^t$
II) $(k.A)^t = k.A^t$; $k \in \mathbb{R}$
III) $(A^t)^t = A$
IV) $(A.B)^t = B^t.A^t$

Exercício: Considere as matrizes

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Verifique a propriedade (IV) de matriz transposta.

2) Matriz simétrica

Uma matriz quadrada A é dita **simétrica** se $A = A^t$.

EXEMPLO.

$$A = A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

OBSERVAÇÕES.

1) Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$.

2) O produto de uma matriz quadrada A pela sua transposta A^t é uma matriz simétrica.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Temos que:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } S = AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo: $S = S^t$.

3) Matriz anti-simétrica

Uma matriz quadrada A é dita **anti-simétrica** se $A = -A^t$.

1.51.5.6.1 EXEMPLO.

A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -9 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ é anti-simétrica.

De fato:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -9 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Observação: Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz anti-simétrica, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são opostos e os elementos da diagonal principal são nulos.

4) Matriz Periódica

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$, diz-se que A é uma **matriz periódica** se $A^n = A$, sendo $n \geq 2$. Se n é o menor inteiro para o qual $A^n = A$, diz-se que o **período** de A é $n - 1$.

5) Matriz Idempotente

Dada uma matriz periódica A, tal que $A^2 = A$, diz-se que A é uma **matriz idempotente**. O **período** da matriz idempotente é $2 - 1 = 1$.

1.51.5.6.2 EXEMPLO.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. Temos que A é idempotente, pois $A^2 = A$.
De fato:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Observação: Se $A^2 = A$, então $A^3 = A^4 = A^5 = \cdots = A^n = A$.

6) Matriz Nihilpotente

Dada uma matriz quadrada A, se existir um número p, inteiro e positivo, tal que $A^p = 0$, diz-se que A é uma **matriz nihilpotente**. Se p é o menor inteiro positivo tal que $A^p = 0$, diz-se que A é uma matriz nihilpotente de **índice** p.

1.51.5.6.3 EXEMPLOS.

a) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Temos que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, a matriz A é nihilpotente de índice 2.

Observação: Se $A^2 = 0$, então $A^3 = A^4 = A^5 = \cdots = A^n = 0$.

b) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Verifique que A é nihilpotente de índice 3.

Observação: Se $A^3 = 0$, então $A^4 = A^5 = A^6 = \cdots = A^n = 0$.

1.5.7 Inversão de matrizes

DEFINIÇÃO.

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, se existir uma matriz quadrada B, de mesma ordem, que satisfaça à condição

$$AB = BA = I$$

então dizemos que A é inversível (ou invertível) e que B é uma inversa de A.
Notação: $B = A^{-1}$

Veremos que a inversa é única, por isso podemos denotá-la por A^{-1}. Então:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Se não existe uma tal matriz B, então dizemos que A é **não-inversível** ou **singular**.

EXEMPLOS.

a) Verifique que a matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é uma inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Solução:

Basta verificar que $AB = I = BA$.
De fato:

$AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
e

$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Portanto: $B = A^{-1}$ ou $A = B^{-1}$.

b) Verifique que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ é singular.

Dica: Tome uma matriz $B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ qualquer e prove que $BA \neq I$.

c) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. Determine a inversa A^{-1} de A, caso exista.

1.51.5.7.4 PROPRIEDADES.

P1) Se uma matriz é inversível, então sua inversa é única, isto é, uma matriz inversível não pode ter mais de uma inversa.

1.51.5.7.5 TEOREMA.
Se B e C são ambas inversas da matriz A, então $B = C$.

Demonstração: Exercício

Observação: A inversa de A desempenha, portanto, na aritmética matricial o mesmo papel que o recíproco a^{-1} desempenha nas relações numéricas $aa^{-1} = 1$ e $a^{-1}a = 1$.

P2) O próximo teorema dá condições sob as quais uma matriz 2×2 é invertível e fornece uma fórmula simples para sua inversa.

1.51.5.7.6 TEOREMA.
A matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

é inversível se $ad - bc \neq 0$, e neste caso a inversa é dada pela fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

Demonstração: Exercício

Mais adiante iremos desenvolver um método para encontrar a inversa de matrizes inversíveis de qualquer tamanho.

1.51.5.7.7 EXEMPLOS.

a) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. Ache A^{-1}, se existir, aplicando a propriedade P2.

Solução:

Como $1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0$, então pela propriedade P2, existe a inversa A^{-1} de A. E a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Considere $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. Determine A^{-1}, se existir, aplicando a propriedade P2.

c) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. Encontre a inversa A^{-1} de A, agora aplicando a propriedade P2.

P3) A inversa do produto de duas matrizes inversíveis.

1.51.5.7.8 TEOREMA.
Se A e B são matrizes inversíveis de mesmo tamanho, então AB é inversível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Demonstração: Exercício

Este resultado pode ser estendido para incluir três ou mais fatores. Vejamos a seguir, a generalização do resultado anterior para n fatores.

1.51.5.7.9 TEOREMA.
Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são matrizes inversíveis de mesmo tamanho, então $A_1A_2...A_n$ é inversível e

$$(A_1A_2...A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}...A_1^{-1}$$

Demonstração: Exercício. (Basta aplicar indução e o teorema anterior).

Conclusão: O produto de um número qualquer de matrizes invertíveis é invertível e a inversa do produto é o produto das inversas em ordem inversa.

1.51.5.7.10 EXEMPLO.

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ dos exemplos de P2.

a) Ache a inversa $(AB)^{-1}$ usando P2.
b) Ache a inversa $(AB)^{-1}$ usando P3.

P4) Invertibilidade de uma transposta.

O teorema a seguir estabelece uma relação entre a inversa de uma matriz invertível e a inversa de sua transposta.

1.51.5.7.11 TEOREMA.

Se a matriz A é inversível, sua transposta A^t também o é. A matriz inversa de A^t é $(A^{-1})^t$. Isto é:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Demonstração: Exercício

1.51.5.7.12 EXEMPLO.

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) A matriz A é inversível? No caso afirmativo, ache a matriz inversa de A.

(b) Determine a transposta de A.

(c) A matriz A^t é inversível? Aplique o teorema anterior e ache a inversa de A^t no caso afirmativo.

P5) Se a matriz A é inversível, então sua inversa também o é e $(A^{-1})^{-1} = A$.

P6) A matriz identidade I admite inversa e ela é a sua própria inversa, isto é: $I = I^{-1}$.

Exercício:

a) Verifique se a matriz C é inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Verifique se a matriz F é inversa de B.

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } F = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

c) Efetue o produto das matrizes A e B.

d) Efetue o produto das matrizes B^{-1} e A^{-1}.

e) Verifique que o produto das matrizes AB e $B^{-1}A^{-1}$ é igual a I. Comente sobre o resultado.

P7) Potência negativa de uma matriz

1.51.5.7.13 DEFINIÇÃO.
Se A é invertível, definimos as potências inteiras negativas por

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}_{\text{n fatores}} \qquad (n > 0)$$

O próximo teorema fornece algumas propriedades úteis de expoentes negativos.

1.51.5.7.14 TEOREMA. (Leis de expoentes)
Se A é uma matriz invertível, então

(a) A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para $n = 0, 1, 2, ...$
(b) Para qualquer escalar não-nulo k, a matriz kA é invertível e $(kA)^{-1} = \left(\frac{1}{k}\right) A^{-1}$.

Demonstração: Exercício.

1.51.5.7.15 EXEMPLO.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. Encontre as potências A^3 e A^{-3}.

1.5.8 Método para encontrar a inversa de matrizes inversíveis de qualquer tamanho

Operações Elementares

Denominam-se **operações elementares** de uma matriz as seguintes:

I) Permutação de 2 linhas (ou 2 colunas).
II) Multiplicação de todos os elementos de uma linha (ou coluna) por um número real diferente de zero.
III) Substituição dos elementos de uma linha (coluna) pela soma deles com os elementos correspondentes de outra linha (coluna) previamente multiplicados por um número real diferente de zero.

Equivalência de matrizes

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem, diz-se que a matriz B é **equivalente** à matriz A, e se representa por $B \sim A$, se for possível transformar A em B por meio de uma sucessão finita de operações elementares.
Notação: $A \sim B$ ou $A \rightarrow B$.

Observação: Se as operações elementares são obtidas através de linhas, também podemos dizer que B é **linha equivalente** a A. No caso de ser obtido através de colunas, dizemos ainda que B é **coluna equivalente** a A.

Notações das operações elementares:

Usaremos a mesma notação vista referente a operações elementares para sistema lineares:

1^a) $L_{23} \rightarrow$ permutação da 2^a linha pela 3^a de uma matriz

2^a) $L_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow$ multiplicação de todos os elementos da 2^a linha por $\frac{1}{4}$

3^a) $L_1 = L_1 + L_2 \cdot (-3) \rightarrow$ substituição dos elementos da 1^a linha de uma matriz pela soma deles com os elementos correspondentes da 2^a linha previamente multiplicados por -3

1.51.5.8.16 EXEMPLO.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}$. Vamos aplicar operações elementares para transformar a matriz A numa matriz equivalente A_3.

1^o) Queremos permutar a 2^a linha pela 3^a da matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{L_{23}} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2^o) Queremos multiplicar todos os elementos da 2^a linha da matriz A_1, por $\frac{1}{4}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{L_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3^o) Queremos substituir os elementos da 1^a linha da matriz A_2 pela soma deles com os elementos correspondentes da 2^a linha previamente multiplicados por -3 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2 \cdot (-3)} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Assim: $A \sim A_3$.

Transformação de uma matriz na matriz identidade I

Veremos mais adiante que qualquer matriz quadrada A, de ordem n, não-singular (isto é, $\det A \neq 0$), pode ser transformada na matriz equivalente I, de mesma ordem, por meio de uma sucessão finita de operações elementares, isto é, $I \sim A$.

Procedimento

Veremos agora um procedimento para transformar uma matriz quadrada A, não-singular, na matriz I.
Aplicar operações elementares adequadas nas linhas (ou colunas), de maneira que:

1^o) transformem a matriz A numa matriz triangular superior (inferior);

2^o) substituam cada um dos elementos da diagonal principal pelo número 1;

3^o) substituam todos os elementos situados acima (abaixo) da diagonal principal por zeros (isto é, processem a diagonalização da matriz A).

Observação: o 2^o passo pode ser feito simultaneamente ao 1^o passo.

1.51.5.8.17 EXEMPLO.
Transformar a matriz $A_{3\times 3}$ na matriz equivalente I.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1 \cdot (-4)}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_1 \cdot (-2)} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{23}}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)} A_5 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Logo, a matriz A, por meio de uma sucessão finita (8) de operações elementares, foi transformada na matriz equivalente I.
Portanto: $A \sim I$.

Inversão de uma matriz por meio de operações elementares

Procedimento de Inversão

Para determinar a inversa de uma matriz inversível $A_{n\times n}$, devemos encontrar uma sequência de operações elementares sobre linhas (ou colunas) que reduz A à identidade e depois efetuar esta mesma sequência de operações em I_n para obter A^{-1}.
Ou seja, a mesma sucessão finita de operações elementares que transforma a matriz A na matriz identidade I, transforma a matriz I na matriz A^{-1}, inversa de A.

Método simples para executar este procedimento

Para determinar a matriz inversa A^{-1} de A :

a) coloca-se ao lado da matriz A a matriz I, separada por um traço vertical:

$$[A \mid I]$$

b) transforma-se, por meio de operações elementares, a matriz A na matriz I, aplicando-se, simultaneamente, à matriz I, colocada ao lado da matriz A, as mesmas operações elementares para produzir A^{-1}. No final teremos:

$$\left[I \mid A^{-1}\right]$$

1.51.5.8.18 EXEMPLO.

Determinar a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1 \cdot (-4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_1 \cdot (-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{23}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Portanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

Pode-se fazer a verificação efetuando o produto AA^{-1} e confirmando que o resultado deve ser I.

Exercício: Determinar a inversa das seguintes matrizes

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Observação: Muitas vezes não sabemos de primeira se uma dada matriz é ou não invertível. Veremos na próxima seção uma forma de determinar se uma matriz admite inversa por meio de determinantes. Enquanto não temos a teoria de determinantes, se o procedimento dos exemplos anteriores for tentado em uma matriz que não é inversível, então em algum ponto das contas vai aparecer uma linha de zeros no lado esquerdo. Pode-se então concluir que a dada matriz não é inversível e parar as contas. Em outras palavras, se uma matriz A de tamanho $n \times n$ não é invertível, então ela não pode ser reduzida a I_n por operações elementares sobre linhas. Ou seja, a forma escalonada reduzida por linhas de A tem pelo menos uma linha de zeros.

1.5.9 Determinantes

O determinante de uma matriz é um escalar obtido dos elementos da matriz, mediante operações específicas. Os determinantes são definidos somente para matrizes quadradas. Indicamos o determinante da matriz

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ por } \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinante de 1^a ordem

O determinante da matriz $A_{1\times 1} = [a_{11}]$ é dado por $\det A = a_{11}$.

1.51.5.9.19 EXEMPLO.

Se $A = [-5]$, então $\det A = -5$.

Determinante de 2^a ordem

O determinante da matriz $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é dado por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Isto é: o determinante de uma matriz de 2^a ordem é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

1.51.5.9.20 EXEMPLO.

Se $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, então $\det A = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 6(-1) - (-3)5 = -6 + 15 = 9$

Determinante de 3^a ordem

O determinante da matriz $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é dado por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

1.51.5.9.21 EXEMPLO.

Seja $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Então:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

Podemos utilizar um dos dois métodos, descritos a seguir, para simplificar essa memorização:

a) Regra de Sarrus
b) Teorema de Laplace

Regra de Sarrus

A Regra de Sarrus é utilizada, unicamente, para determinantes de matrizes de 3^a ordem.
Repetimos ao lado da matriz, as duas primeiras colunas dessa matriz.
Os termos precedidos pelo sinal "+"são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Os termos precedidos pelo sinal -"são obtidos multiplicando-se os elementos de acordo com as setas situadas na direção da diagonal secundária:

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Esquema:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

1.51.5.9.22 EXEMPLO.

Seja $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Então:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{matrix} =$$

Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace é utilizado para determinantes de matrizes de ordem $n \geq 2$.
Para desenvolvermos esse teorema, vamos definir, primeiramente, o que é um **cofator**.

1.51.5.9.23 DEFINIÇÃO.

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz, obtém-se outra matriz de ordem $(n-1)\times(n-1)$, representada por $M_{ij} = [a_{ij}]_{n-1\times n-1}$.
O determinante dessa matriz é denominado **menor** da matriz A.
O escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ é chamado **cofator** da matriz A.

1.51.5.9.24 EXEMPLOS.

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$c_{11} = (-1)^{1+1}\,|4| = 4$
$c_{12} = (-1)^{1+2}\,|3| = -3$
$c_{21} = (-1)^{2+1}\,|2| = -2$
$c_{22} = (-1)^{2+2}\,|1| = 1$

b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$c_{11} = (-1)^{1+1}\,|M_{11}| = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(45-48) = -3$

$c_{12} =$

$c_{13} =$

$c_{21} =$

$c_{22} =$

$c_{23} =$

$c_{31} =$

$c_{32} =$

$c_{33} =$

Cálculo do determinante via cofator

1.51.5.9.25 TEOREMA. (Teorema de Laplace)

Considere uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $n \geq 2$.
O determinante de A pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna da matriz A pelos respectivos cofatores, isto é:

a) Fixando a coluna j, temos:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

b) Fixando a linha i, temos:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

Observações:

1) Para fazer menos cálculos, pode-se escolher a linha ou coluna que tenha mais "zeros".

2) O determinante de uma matriz de ordem maior que 3 só pode ser calculado por meio dos cofatores.

1.51.5.9.26 EXEMPLOS.

a) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$. Ache o determinante de A por meio de cofatores.

b) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 4}$. Determine $\det A$.

1.51.5.9.27 PROPRIEDADES.

1) Quando todos os elementos de uma linha ou coluna são nulos, o determinante dessa matriz será zero.

2) Quando duas linhas ou colunas são iguais, o determinante dessa matriz será zero.

3) Quando duas linhas ou colunas são proporcionais (uma múltipla da outra), o determinante dessa matriz será zero.

4) Quando os elementos de uma linha (coluna) forem combinações lineares dos elementos correspondentes das outras linhas (colunas), o determinante dessa matriz será zero.

5) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

6) Quando os elementos de uma linha (coluna) forem multiplicados por um número real, o determinante dessa matriz será multiplicado por este número.

7) Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times n}$, então $\det(AB) = \det A \det B$.
Dessa propriedade conclui-se que:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A},$$

pois $AA^{-1} = I_n$.

8) Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $k \in \mathbb{R}$. Então:

$$\det(kA) = k^n \det A$$

Inversão de Matrizes x Determinante

1.51.5.9.28 DEFINIÇÕES.

1) Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ cujo determinante é nulo é uma **matriz singular**.

2) Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ cujo determinante é diferente de zero é uma matriz **não-singular** ou **regular**.

Observações:

a) A matriz singular não tem inversa.
b) A matriz não-singular sempre tem inversa.

1.51.5.9.29 EXEMPLOS.

a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ é singular, pois $\det A = 0$. (Verifique usando a Regra de Sarrus.)

b) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ é não-singular, pois $\det A \neq 0$. (Verifique aplicando o Teorema de Laplace.)

1.6 Método de Cramer

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Veremos agora como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

1.6.1 Forma Matricial de um Sistema

Seja S um sistema de m equações lineares ($m \geq 1$) e com n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$, onde a_{ij} é o coeficiente da incógnita x_j e c_i, o termo independente.
Esse sistema será representado da seguinte forma:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{k}$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Esse sistema pode ser escrito, na **forma matricial**, como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Chamando de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ e $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$, temos em notação matricial:

$$AX = C$$

1.61.6.1.1 EXEMPLOS.

a) O sistema $S_1 : \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 1 \end{array} \right.$ pode ser escrito, na forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) O sistema $S_2 : \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + 2z = 5 \\ 3x + y - 7z = 2 \end{array} \right.$ pode ser escrito, como

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.6.2 Matrizes de um Sistema

1.61.6.2.2 DEFINIÇÕES.

(a) A **matriz incompleta**, associada ao sistema S anterior, é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

formada somente pelos coeficientes das incógnitas do sistema.

(b) A **matriz completa** (ou **ampliada**, ou **aumentada**), associada ao sistema S anterior, é

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{bmatrix}_{m\times n+1} \quad \text{ou} \quad B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right]$$

formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes do sistema.

O traço vertical é opcional, mas é colocado para facilitar a visualização da matriz dos coeficientes das variáveis e da matriz coluna dos termos independentes.

1.61.6.2.3 EXEMPLOS.

a) Seja $S_1 : \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$. Daí:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Seja $S_2 : \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ 3x + y - 7z = 2 \end{cases}$. Daí:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

1.6.3 Determinante do Sistema

1.61.6.3.4 DEFINIÇÃO.

Quando o número de equações de um sistema linear for igual ao número de incógnitas ($m = n$), então a matriz incompleta A será quadrada. Daí, existe um determinante $D = \det A$, denominado **determinante do sistema**.

Observações:

1) Se $D = \det A \neq 0$, então o sistema é compatível e determinado.

2) Se $D = \det A = 0$, então o sistema ou é compatível e indeterminado (isto é, possui infinitas soluções) ou é incompatível (isto é, não tem soluções).

1.61.6.3.5 EXEMPLOS.

a) Seja $S_1 : \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$. Então:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0.$

Daí, o sistema é compatível e determinado. (Única solução: $x = 2$ e $y = 3$. Verifique!)

b) Seja $S_2 : \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$. Então:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Daí, o sistema é compatível e indeterminado ou é incompatível.
Nesse caso, ele é compatível e indeterminado (infinitas soluções: $y = 7 - 2x$. Verifique!)

c) Seja $S_3 : \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$. Então:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Daí, o sistema é compatível e indeterminado ou é incompatível.
Nesse caso, ele é incompatível (nenhuma solução. Verifique!)

Sistema homogêneo x Determinante do sistema

Determinante do sistema homogêneo

Seja A a matriz incompleta de um sistema homogêneo S cujo número de incógnitas é igual ao número de equações. Conforme a análise do determinante do sistema $D = \det A$ feita anteriormente, podemos concluir:

1) Se $D = \det A \neq 0$, então o sistema homogêneo S possui apenas a solução trivial.

2) Se $D = \det A = 0$, então o sistema possui a solução trivial e as soluções não-triviais.

1.6.4 Regra de Cramer

Na resolução de sistemas de equações, onde a matriz A é quadrada, empregamos uma regra prática conhecida pelo nome de **Regra de Cramer**, que permite encontrar facilmente a solução.

Considere o sistema

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

O valor da incógnita x_i é obtido da seguinte maneira:

$$x_i = \frac{Dx_i}{D}$$

onde:

$x_i \longrightarrow$ variáveis do sistema;
$D \longrightarrow$ determinante formado pelos coeficientes das incógnitas (determinante do sistema);
$Dx_i \longrightarrow$ determinante que se obtém substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita procurada pelos termos independentes $c_1, c_2, ..., c_n$.

Ou equivalentemente:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; ...; Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_2 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_n \end{vmatrix}$$

1.61.6.4.6 EXEMPLOS.

a) Seja $S : \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$. Então:

$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $D = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-2) = 11 \neq 0.$

Logo, o sistema S é compatível e determinado, ou seja, S possui uma única solução.
Pela Regra de Cramer, temos:

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11$. Logo: $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{11}{11} = 1.$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$. Logo: $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-11}{11} = -1.$

Portanto: $x = 1$ e $y = -1$ é a única solução de S.

b) Seja $S : \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$.

b-1) Discutir o sistema S por meio do determinante do sistema.
b-2) Resolver o sistema S usando a Regra de Cramer.

1.7 Outros Métodos para Resolução de um Sistema Linear utilizando matrizes

Nesta seção, continuaremos o estudo da resolução de sistemas de equações lineares utilizando matrizes. Vamos separar o estudo em três casos:

1^o) Sistema de n equações lineares com igual número de variáveis.

2^o) Sistema de m equações lineares com n variáveis (para $n \neq m$).

3^o) Sistema de equações lineares homogêneo (para $m = n$ ou $m \neq n$).

1^o caso) Sistema de n equações lineares com n variáveis

Destacamos na seção anterior, o Método de Cramer, uma regra prática utilizada para resolver sistemas de n equações lineares com n variáveis, por meio de determinantes.
Estudaremos agora outros dois métodos:

(i) o Método de Gauss-Jordan e
(ii) o Método da Matriz Inversa

(i) O Método de Gauss-Jordan

Considere o sistema de equações lineares

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

Procedimento:

1) Considere a matriz ampliada de S

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_n \end{array} \right]$$

2) Transforme, por meio de operações elementares, a matriz dos coeficientes das variáveis na matriz unidade, aplicando-se, simultaneamente, à matriz-coluna, colocada ao lado da matriz dos coeficientes das variáveis, as mesmas operações.

3) Transformada a matriz dos coeficientes das variáveis na matriz unidade, a matriz dos termos independentes ficará transformada, ao final, na solução do sistema.

1.71.7.0.1 EXEMPLOS.

a) Considere o sistema $S : \begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ 5x - 15y = -20 \end{cases}$.

Ache a solução de S pelo Método de Gauss-Jordan.

Solução:

Considere a matriz incompleta de S

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -15 \end{bmatrix}$$

Como $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -15 \end{vmatrix} = -30 - 20 = -50 \neq 0$, então S tem uma única solução, isto é, S é um sistema compatível e determinado.
Aplicando o Método de Gauss-Jordan, considere a matriz ampliada de S

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 22 \\ 5 & -15 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 5 & -15 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1 \cdot (-5)}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & -25 & -75 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \cdot \left(-\frac{1}{25}\right)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2 \cdot (-2)}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

O sistema inicial ficou transformado no sistema equivalente:

$$\begin{cases} 1.x + 0.y = 5 \\ 0.x + 1.y = 3 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Logo, a única solução do sistema dado é: $x = 5$ e $y = 3$.

b) Utilizando o Método de Gauss-Jordan, resolva o sistema

$$S : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

(ii) O Método da Matriz Inversa

Considere o sistema de n equações lineares com n variáveis:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Fazendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o sistema S pode ser escrito na forma matricial

$$A.X = B$$

Admitindo a existência da matriz A^{-1} e multiplicando ambos os membros da igualdade por A^{-1}, vem:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Daí, para achar a solução do sistema, basta multiplicar a matriz inversa A^{-1} da matriz A dos coeficientes das variáveis pela matriz coluna B dos termos independentes.

1.71.7.0.2 EXEMPLO.

Resolver os seguintes sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = b_1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases}$$

1) Para $b_1 = 16$, $b_2 = -5$, $b_3 = 11$
2) Para $b_1 = 25$, $b_2 = -11$, $b_3 = -5$
3) Para $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $b_3 = -5$

2^o caso) Sistema de m equações lineares com n variáveis (para $n \neq m$).

O método para resolver um sistema de m equações lineares com n variáveis é semelhante ao método de Gauss-Jordan visto anteriormente, com a diferença de que a matriz dos coeficientes das variáveis não pode ser transformada na matriz unidade, porque ela é uma matriz retangular. Entretanto, o procedimento inicial é o mesmo.

Resumo do procedimento: transforma-se no número 1, por meio de operações adequadas, cada elemento a_{ij}, no qual $i = j$, e em zeros os demais elementos das colunas em que se situam esses a_{ij}. Depois, feitas algumas considerações, se encontrará a solução do sistema.

Forma Escada

1.71.7.0.3 DEFINIÇÃO.

Uma matriz $m \times n$ é **linha reduzida à forma escada** se

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).
d) Se as linhas $1, ..., r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_r$.

Esta última condição impõe a forma escada à matriz:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & & & & \blacksquare \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

Isto é, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

1.71.7.0.4 EXEMPLOS.

a) Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Não é a forma escada pois a segunda condição não é satisfeita.

b) Tome a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não é a forma escada pois não satisfaz a primeira e a quarta condições.

c) Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Não é a forma escada pois não satisfaz a primeira nem a terceira condição.

d) Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É a forma escada pois todas as condições são satisfeitas.

1.71.7.0.5 TEOREMA.

Toda matriz $A_{m\times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.

Este teorema permite-nos definir os conceitos abaixo que serão relacionados a seguir com o número real de equações e o número de soluções de um sistema.

1.71.7.0.6 DEFINIÇÃO.

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A.

a) O **posto** de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B.

b) A **nulidade** de A é o número $n - p$.

Observação: Dada uma matriz A qualquer, para achar seu posto necessitamos encontrar primeiro sua matriz linha reduzida à forma escada, e depois contar suas linhas não nulas. Este número é o posto de A. Para determinar sua nulidade, basta fazer a diferença entre o número de colunas de A e o posto.

1.71.7.0.7 EXEMPLOS.

1) Encontre o posto e a nulidade de A, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Devemos achar sua matriz linha reduzida à forma escada. Para isso, efetuamos as seguintes operações com matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_1 \cdot (-1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2 \cdot (-2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_2 \cdot (4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_3 \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_3 \cdot (3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

Assim, o posto de A é 3 e a nulidade de A é $4 - 3 = 1$.

Observação: Se interpretarmos a matriz A dada acima como sendo a matriz ampliada de um sistema linear, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

A matriz linha reduzida à forma escada é linha equivalente à matriz A. Logo, o sistema que ela representa

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{11}{8} \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial, possuindo a mesma solução que este.

2) Determine o posto e a nulidade de B, onde

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução:

Efetuando operações adequadas (exercício!), obtemos a matriz linha reduzida à forma escada que é linha equivalente a B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, o posto de B é 2, e a nulidade é 1.

Observações:

a) Note que a matriz

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

tem o mesmo posto e nulidade que B.

b) Reinterpretando as matrizes anteriores como sistemas de equações, temos que o sistema de quatro equações associado à matriz inicial:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema de duas equações:

$$\begin{cases} x + 0y = \frac{14}{9} \\ 0x + y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

associado à matriz linha reduzida à forma escada.

Este é um caso de sistema com equações reduntantes. A terceira e a quarta equações (que se tornam nulas no final do processo) podem ser desprezadas. Isto significa que o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

associado à matriz B_1.

Terminologia: Neste caso, dizemos que as duas primeiras equações são **independentes** e que as demais são **dependentes** destas (isto é, igual a zero no final do processo de redução). Observe que uma linha é dependente se ela for combinação linear das outras, ou seja, ela pode ser escrita como soma de produtos das outras linhas por constantes.

Conclusão: segundo esta terminologia, o posto de uma matriz é o número de linhas independentes dela.

A seguir, serão dados três exemplos dos casos que podem ocorrer e que facilitarão a compreensão do método.

Capítulo 2

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

2.1 Seqüências de Funções

2.1.1 DEFINIÇÃO.

Uma seqüência de funções $\{f_n\}$, definidas num mesmo domínio $D \subset \mathbb{R}$, **converge em um ponto** $x \in D$ se a seqüência *numérica* $\{f_n(x)\}$ converge. Se a seqüência *converge* em todos os pontos de um subconjunto $S \subset D$ diremos que **converge pontualmente** em S.

EXEMPLO. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n definido em $\mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = x^n.$$

Então se $|x| < 1$, $\{f_n(x)\}$ converge (para zero), $\{f_n(1)\}$ converge (para 1), $\{f_n(-1)\}$ diverge e se $|x| > 1$, $\{f_n(x)\}$ também diverge. Logo $\{f_n\}$ converge pontualmente em $S =]-1, 1[$.

2.1.2 OBSERVAÇÃO.

Se uma seqüência de funções $\{f_n\}$ converge pontualmente num subconjunto S do domínio comum, podemos definir uma função $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x), \qquad x \in S.$$

Dizemos então que $\{f_n\}$ **converge pontualmente** para f, em S.

EXEMPLO. Seja $\{f_n\}$ a seqüência em $[0,1]$ definida por $f_n(x) = x^n$. Então $\{f_n\}$ converge pontualmente para $\chi_{\{1\}}$, onde $\chi_{\{1\}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\chi_{\{1\}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Portanto

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x^n = \mathcal{X}_{\{1\}}(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

2.1.3 DEFINIÇÃO.

> Uma seqüência de funções $\{f_n\}$, definidas num mesmo domínio $D \subset \mathbb{R}$, converge **uniformemente** num subconjunto $S \subset D$, se existe uma função $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ para a qual, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_\varepsilon$ temos
>
> $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$
>
> qualquer que seja $x \in S$. Dizemos então que $\{f_n\}$ **converge uniformente** para f, em S.

É claro que se $\{f_n\}$ converge uniformemente, converge também pontualmente.

EXEMPLO. Consideremos a seqüência $\{f_n\}$ definida em $[0,1]$, por

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx} = \frac{x^2}{\frac{1}{n} + x}$$

A seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente para a função identidade $I(x) = x$. De fato

$$|f_n(x) - x| = \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| = \left| \frac{x}{1+nx} \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{nx}{1+nx} \right| < \frac{1}{n}.$$

Como a seqüência $\{1/n\}_n$ converge para zero e não depende de x, dado $\varepsilon > 0$, podemos determinar $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que $1/n < \varepsilon$, se $n \geq N_\varepsilon$; conseqüentemente

$$\left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| < \varepsilon,$$

para todo $x \in [0,1]$.

CONTRA-EXEMPLOS. (i) Consideremos em $[0,1]$, a seqüência $\{f_n\}$ definida por $f_n(x) = x^n$. A convergência de $\{f_n\}$ para $\mathcal{X}_{\{1\}}$ é pontual mas não é uniforme. De fato, seja ε escolhido de modo que $0 < \varepsilon < 1/2$. Mas, *qualquer* que seja $n \in \mathbb{N}$ vamos ter

$$|f_n(2^{-1/n}) - \mathcal{X}_{\{1\}}(2^{-1/n})| = |(2^{-1/n})^n - 0| = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

logo $\{f_n(x) = x^n\}$ não pode convirgir uniformemente para $\chi_{\{1\}}$ em $[0,1]$.
(ii) A seqüência $\{f_n\}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

converge para zero pontualmente mas não uniformemente em $\mathbb{R}$. A convergência é uniforme apenas em subconjuntos limitados.

2.1.4 TEOREMA.

Uma seqüência $\{f_n\}$ de funções definidas num mesmo domínio D, converge uniformemente para uma função f num subconjunto $S \subset D$, se e somente se

(1) $$\sup_{x\in S}|f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Demonstração. Se 2.1.4(1) é verificada, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que para todo $x \in S$, temos

$$|f_n(x) - f(x) \leq \sup_{x\in S}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

se $n \geq N_\varepsilon$. Logo, $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em S.

Reciprocamente, se $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em S, dado $\varepsilon > 0$ seja $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Então, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in S$ temos

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon',$$

se $n \geq N_\varepsilon$. Como ε' não depende de x podemos tomar o supremo na desigualdade acima para obtermos

$$\sup_{x\in S}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon' < \varepsilon,$$

se $n \geq N_\varepsilon$. ■

EXEMPLO. Consideremos em $[0,+\infty[$ a seqüência $\{f_n\}$ definida por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.
Seja $I \subset [0,+\infty[$ um subconjunto limitado e $c = \sup I$. Então,

$$\sup_{x\in I}\left|\frac{x}{n}\right| \leq \frac{c}{n} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Portanto $\{f_n(x) = x/n\}$ converge uniformemente para zero em qualquer subconjunto limitado de $[0,+\infty[$. Mas

$$\sup_{0\leq x<+\infty}\left|\frac{x}{n}\right| \geq 1$$

e $\{f_n(x) = x/n\}$ não pode convirgir uniformemente em $[0,+\infty[$.

2.1.5 DEFINIÇÃO.

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções *limitadas* definidas num mesmo domínio D. Dizemos que $\{f_n\}$ é uma seqüência de **Cauchy uniforme** se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ e todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon.$$

2.1.6 TEOREMA.

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de Cauchy uniforme de funções limitadas definidas num mesmo domínio D. Então, a seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente para uma função limitada f.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon, \tag{1}$$

para todo $x \in D$, todo $n \geq N$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo, para cada $x \in D$, $\{f_n(x)\}$ é uma seqüência de Cauchy de números reais e portanto converge para um número real, que denotaremos por $f(x)$. Como o limite de uma seqüência é único, a correspondencia

$$x \in D \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

é uma função. De (1) segue em particular, para todo $x \in D$ e $k \in \mathbb{N}$, que

$$|f_N(x) - f_{N+k}(x)| < \varepsilon.$$

Fazendo k tender ao infinito obtemos

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

e

$$|f(x)| \leq |f_N(x)| + \varepsilon,$$

para todo $x \in D$. Logo f é limitada. A uniformidade da convergência é clara (por que?) ■

EXERCÍCIOS.

1. Seja $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $0 \leq x < \infty$.

1) Demonstre que a seqüência $\{f_n\}$ é limitada

2) Demonstre que $\{f_n\}$ converge uniformemente em $[0, c] \subset [0, 1[$.

3) Demonstre que $\{f_n\}$ converge uniformemente em $x \geq b > 1$

4) Demonstre que $\{f_n\}$ **não** converge uniformemente em $x \geq 1$.

2. Seja $f_n(x) = 1/nx,\ x > 0$. Para que valores de x existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$? É uniforme para $x > 0$? É uniforme para $x \geq 1$?

3. Verificar a convergência pontual e uniforme das seguintes seqüências.

1) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$;	2) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$;
3) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n+x^n},\ x \geq 0$;	4) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+nx^2}$;
5) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$;	6) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx},\ 0 \leq x \leq 1$;
7) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^n},\ x \geq 0$;	8) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx},\ 0 \leq x \leq 1$;
9) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x},\ x \geq 0$;	10) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx},\ 0 \leq x \leq 1$.

2.2 Seqüências de Funções Contínuas

2.2.1 DEFINIÇÃO.

Seja f uma função definida num dominio D e $x \in D$ tal que existe uma vizinhança $V(x) \subset D$. Diremos que f é contínua no ponto x se, para toda seqüência $\{x_n\}$ que converge para x, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Dizemos que f é contínua em D se for contínua em todos os pontos de D.

2.2.2 DEFINIÇÃO.

Diremos que seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são **paralelas**, e escrevemos $\{x_n\} // \{y_n\}$ se

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

EXEMPLO. As seqûências dadas por $x_n = \sqrt[n]{3}$ e $y_n = \sqrt[n]{2}$ são paralelas.

2.2.3 TEOREMA.

Se f é uma função definida num intervalo $[a, b]$, as seguintes afirmações são equivalentes:

A) f é contínua em $[a, b]$:

B) $\{x_n\} \mathbin{/\!/} \{y_n\}$ implica $\{f(x_n)\} \mathbin{/\!/} \{f(y_n)\}$.

Demonstração. **A) $\Longrightarrow$ B)** Suponhamos que f é contínua e que existam seqüências paralelas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tais que

$$|f(x_n) - f(y_n)| \not\longrightarrow 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existem subseqüências $\{x_{k(n)}\}$ e $\{y_{k(n)}\}$ tais que

$$|f(x_{k(n)}) - f(y_{k(n)})| > \varepsilon, \tag{1}$$

para todo $k(n)$. Como $\{x_{k(n)}\}$ é uma seqüência limitada admite uma subseqüência $\{x_{k'(n)}\}$ convergente, digamos para x_0. Como f é suposta contínua vamos ter

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k'(n)}) = f(x_0).$$

Por outro lado, como $\{y_{k'(n)}\} \mathbin{/\!/} \{x_{k'(n)}\}$ teremos também $y_{k'(n)} \longrightarrow x_0$. Então, de (1) vamos ter

$$\varepsilon < |f(x_{k'(n)}) - f(y_{k'(n)})| \leq |f(x_{k'(n)}) - f(x_0)| + |f(y_{k'(n)}) - f(x_0)| \longrightarrow 0,$$

o que é absurdo.

B) $\Longleftarrow$ A) Seja $x \in [a, b]$ e $\{x_n\}$ uma seqüência arbitrária que converge para x. Então, as seqüência de termos x_n e $y_n = x$ são paralelas. Mas neste caso a afirmação **B)** é a definição de função contínua no ponto x. ■

2.2.4 TEOREMA.

> Seja (f_n) uma seqüência de funções contínuas definidas num mesmo intervalo $[a, b]$. Suponhamos que (f_n) converge uniformemente para uma função f, definida em $[a, b]$. Então f é uma função contínua.

Demonstração. Como (f_n) converge uniformemente para f, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_{k_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo z em $[a, b]$. Por outro lado, como f_{k_0} é contínua, quaisquer que sejam as seqüências paralelas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então

$$|f_{k_0}(x_n) - f_{k_0}(y_n)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto, vamos ter

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f_{k_0}(x_n)| + |f_{k_0}(x_n) - f_{k_0}(y_n)| + |f_{k_0}(y_n) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ou seja f é contínua em $[a, b]$. ■

2.2.5 COROLÁRIO.

> Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de Cauchy uniforme de funções contínuas definidas num mesmo intervalo $[a, b]$. Então, a seqüência f_n converge uniformemente para uma função contínua f em $[a, b]$.

Demonstração. As funções f_n são limitadas. Logo convergem uniformemente para uma função limitada f, pelo Teorema 2.1.6. Finalmente, pelo Teorema anterior a função f é contínua.

Os seguintes exemplos mostram que a condição de convergência uniforme no Teorema 2.2.4 é suficiente mas não é necessária.

EXEMPLO. A seqüência $\{f_n\}$, definida por

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2},$$

converge pontualmente em $\mathbb{R}$; pois $f_n(0) = 0$, para todo n e se $x \neq 0$ temos

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x|}.$$

Portanto, a função limite é $f(x) \equiv 0$, que é contínua, mas

$$\frac{1}{2} = |f_n(\frac{1}{n})| \leq \sup_x |f_n(x)|$$

Logo a convergência não é uniforme.

EXEMPLO. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja f_n definida em $[0, 1]$ pela fórmula

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq 1/n, \\ \\ n(1-x)/(n-1) & 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Vamos ter

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 - x & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Como a função limite f não é contínua a convergência não pode ser uniforme. De fato, para todo n, temos

$$1 = f_n(\frac{1}{n}) \leq \sup_n f_n(x).$$

EXERCÍCIOS.
1) Considere a seqüência $\{f_n\}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ \\ 1/nx & 1/n < x. \end{cases}$$

Demonstre que $\lim f_n(x) = 0$, para todo $x \geq 0$. A convergência é uniforme em $x \geq 0$? E em $x \geq c > 0$?

2) Seja f_n definida no intervalo [0,1] pela fórmula

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ \\ 0 & 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Demonstre que $(f_n(x))$ converge para todo x em [0,1]. Esta convergência é uniforme? A função limite é contínua?

2.2.6 O TEOREMA DE APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS.

Demonstração. Basta demonstrar o teorema no caso em que $[a, b] = [0, 1]$.

Seja $f \in C([0, 1])$. Vamos demonstrar que os polinômios de Bernstein

(1) $$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

convergem para f, quando $n \to \infty$, uniformemente.

Como a demonstração é longa vamos dividí-la em três etapas.

Primeira Etapa: Os polinômios de Bernstein aproximam uniformemente as funções

(i) $f_0(x) \equiv 1$:

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \{x + (1-x)\}^n = 1 = f_0(x).$$

(ii) $f_1(x) \equiv x$:

$$\begin{aligned}
B_n(f_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{n(n-k)!k!} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-1-k} \\
&= x\{x+(1-x)\}^{n-1} = x = f_1(x).
\end{aligned}$$

(iii) $f_2(x) \equiv x^2$:

$$\begin{aligned}
B_n(f_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n})^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x \longrightarrow x^2 = f_2(x), \qquad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Segunda Etapa: Para $t \in [0,1]$ seja $\varphi_t(x) = (t-x)^2$ e $\varepsilon > 0$. Então para n suficientemente grande temos

$$|B_n(\varphi_t)(t)| < \varepsilon, \tag{1}$$

para todo $t \in [0,1]$. Com efeito

$$\begin{aligned}
|B_n(\varphi_t)(t)| &= |\sum_{k=0}^{n} \varphi_t(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}| \\
&= |\sum_{k=0}^{n} (t-\frac{k}{n})^2 \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}| \\
&= |t^2\{B_n(1)(t)-1\} - 2t\{B_n(t)(t)-t\} + \{B_n(t^2)(t)-t^2\}| \\
&\le d_\infty(B_n(f_0),f_0) + 2d_\infty(B_n(f_1),f_1) + d_\infty(B_n(f_2),f_2) = d_\infty(B_n(f_2),f_2),
\end{aligned}$$

(onde $d_\infty(g,h) = \sup\{|g(t)-h(t)|\ ;\ 0 \le t \le 1\ \}$) como queríamos.

Terceira Etapa: Seja $f \in C([0,1])$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(t)| < \varepsilon$, se $|x-t| < \delta$. Agora, se $|x-t| \ge \delta$ vamos ter

$$|f(t)-f(x)| \le 2||f|| \le 2||f||(t-x)^2\delta^{-2} = \alpha\varphi_t(x),$$

onde $\alpha = 2||f||_\infty\,\delta^{-2}$ Então, para todo $x \in [0,1]$, temos

$$-\varepsilon - \alpha\varphi_t(x) \le f(t)-f(x) \le \varepsilon + \alpha\varphi_t(x).$$

Observando que se $h \leq g$ então $B_n(h) \leq B_n(g)$ obtemos

$$-\varepsilon - \alpha B_n(\varphi_t)(x) \leq f(t) - B_n(f)(x) \leq \varepsilon + \alpha B_n(\varphi_t)$$

Em particular, tomando $x = t$

$$|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \varepsilon + \alpha |B_n(\varphi_t)(t)| < (1 + \alpha)\varepsilon$$

para n suficientemente grande. Como t foi tomado arbitrário a demostração está completa.■

2.3 Séries de Funções

2.3.1 DEFINIÇÃO.

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas num mesmo subconjunto I de $\mathbb{R}$. A seqüência de têrmos $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ é representada por $\sum f_n$. O símbolo $\sum f_n$ é chamado então série das funções f_n.

2.3.2 DEFINIÇÃO.

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas num mesmo subconjunto I de $\mathbb{R}$. A série $\sum f_n$ converge **pontualmente** em $S \subset I$ se para cada $x \in S$ a série numérica $\sum f_n(x)$ for convergente.

EXEMPLOS. (i) A série $\sum x/n^2$ converge pontualmente para cada x em $\mathbb{R}$.
(ii) A série $\sum x^n$ converge pontualmente em]-1,1[.

2.3.3 DEFINIÇÃO.

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas num mesmo conjunto $I \subset \mathbb{R}$. A série $\sum f_n$ converge **uniformemente** em $S \subset I$ se a seqüência de termos $\sum_{k=1}^{n} f_k$ convergir uniformemente em S.

Antes de darmos exemplos, vamos estabelecer o critério de Cauchy para a convergência uniforme de séries de funções .

2.3.4 CRITÉRIO DE CAUCHY.

A série $\sum f_n$ converge uniformemente em S se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um N_ε tal que $n > N_\varepsilon$ implica

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon,$$

para todo $p \in \mathbb{N}$ e todo $x \in S$.

Demonstração. Basta aplicar o critério de Cauchy para a seqüência $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. ■

EXEMPLOS. (i) A série $\sum 1/(n^2 + x^2)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2 + x^2} = \frac{1}{(n+1)^2 + x^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2 + x^2} < \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

(ii) A série $\sum x^n/n!$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: Tomando $0 < \varepsilon < 1$ e $x \geq n+1$, arbitrário, vamos ter

$$\varepsilon < 1 < \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}.$$

Para a verificação da convergência uniforme de uma série de funções é muito útil o seguinte teste conhecido como o *M–teste de Weierstrass.*

2.3.5 M-TESTE DE WEIERSTRASS.

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas num mesmo subconjunto $I \subset \mathbb{R}$. Seja $\{M_n\}$ é uma seqüência de números não negativos tais que

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n$$

para cada $x \in S \subset I$ e $n \geq N$, para algum N. Então $\sum f_n$ converge uniformemente se $\sum M_n$ converge.

Demonstração. Segue da desigualdade

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k$$

e dos critérios de Cauchy para séries numéricas e séries de funções. ∎

EXEMPLO. A série $\sum 1/(n^2+x^2)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

EXEMPLO. Toda série de potências $\sum_n a_n x^n$ converge uniformemente em intervalos fechados contidos em seu intervalos de convergência.

De fato: Seja R o raio de convergência da série e $[a,b] \subset]-R,R[$. Suponhamos que $|a| \leq |b|$. Como $\sum_n a_n x^n$ converge absolutamente qualquer que seja $x \in [a,b]$, temos

$$|a_n x^n| = |a_n x^n \frac{b^n}{b^n}| = |a_n\, b^n||\frac{x^n}{b^n}| \leq |a_n\, b^n|.$$

A conclusão segue então do M-teste de Weierstrass.

2.3.6 TEOREMA.

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções contínuas definidas num mesmo intervalo $[a,\ b]$. Suponhamos que a série $\sum f_n$ convirja uniformemente para uma função f definida em $[a,\ b]$. Então, f é uma função contínua.

Demonstração. Seja $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$. Então, a seqüência(F_n) converge uniformemente para f, pelo Critério de Cauchy para seqüências de funções . ■

EXEMPLO. Consideremos a série de termos $\dfrac{x}{(1+x)^n}$, que são funções contínuas em $[0,1]$. Vamos ter

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = \chi_{]0,1]}(x).$$

Como $\chi_{]0,1]}$ não é uma função contínua em $[0,1]$, concluimos que a convergência da série não é uniforme.

EXERCÍCIOS. A. Estude quanto a convergência e convergência uniforme as séries $\sum_n f_n$, onde f_n é dada por

1) $f_n(x) = (1-x)^n x^n,\ 0 \leq x \leq 1$

2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n},\ x \geq 0$;

3) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx^2},\ x \neq 0$;

4) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n},\ x \geq 0$;

5) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x},\ x \geq 0$;

6) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n},\ 0 \leq |x| \leq c < 1$;

7) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x},\ 0 < c \leq x$;

8) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2-x^2},\ x \geq 0$;

9) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3+x^3},\ 0 \leq x \leq c < 1.$.

B. Calcule a soma das seguintes séries e verifique a uniformidade da convergência.

1) $\sum_n (1-x)^n x^n, \quad 0 \leq x \leq 1;$

2) $\sum_n \left(\dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{x+n+1}\right), \quad 0 \leq x \leq 1;$

3) $\sum_n \left(\dfrac{1}{nx+2} - \dfrac{1}{nx+x+2}\right), 0 \leq x \leq 1;$