

# Resolviendo Problemas

Estrategias para resolver problemas en Olimpiadas. Las siguientes secciones se refieren a técnicas matemáticas de uso general en la resolución de problemas.

## 1 Escribiendo Soluciones

Recuerda que habrá personas calificando tu trabajo. Ellos intentarán ser tan justos como sea posible, pero si tu escritura es difícil de leer, o la solución está desorganizada o si los enunciados son mal escritos y difíciles de entender, harás difícil al lector entender tu solución, y así será menos probable conseguir alta puntuación. Cuando termines con cada problema, échale una ojeada y supón que tú eres la persona que intenta calificarlo. ¿Cómo lo calificarías?

Aquí están algunas ideas sobre cómo escribir una prueba o hacer que sea fácil de entender:

1. Primero y básico, recuerda todo lo que aprendiste en tus clases de Español. Organiza tus pensamientos, usa oraciones completas, etcétera.
2. Escribe un contorno antes de empezar, donde "contorno" simplemente significa una sentencia o dos explicando cómo trabaja tu demostración. Por ejemplo, puedes escribir algo como esto: "La prueba será por inducción sobre  $n$ , el número de lados del polígono. Veremos que es cierto para un triángulo ( $n = 3$ ), el menor polígono y entonces induciremos sobre  $n$ . Para  $n$  mayor que 3, la prueba será dividida en dos casos, dependiendo si  $n$  es par o impar". Entonces escribe tu demostración en tres partes, idealmente con un pequeño título arriba de cada una, como "Caso  $n = 3$ ", "Caso  $n > 3$ ,  $n$  par", y finalmente, "Caso  $n > 3$ ,  $n$  impar".
3. Si escribes algo que después decides no necesitarlo o es incorrecto, ten por seguro el tacharlo o marcarlo completamente, de tal forma que el lector entienda claramente que no es parte de tu solución.
4. Si tu solución ocupa varias páginas, asegúrate de enumerarlas de una forma obvia: "Problema 3, página 2", por ejemplo.
5. Esto fue dicho arriba, pero es tan importante que vale la pena repetirlo: cuando termines de escribir una solución, toma unos minutos para volver a leer lo que has escrito y estar seguro de que lo que dice es lo que piensas.

## 2 Cómo comenzar

Las matemáticas se deben escribir en la mente, no leerlas en ella. “No hay cabeza para las matemáticas”, casi siempre significa “No utilizaré un lápiz”.

*Arthur Latham Baker*

No gastes tiempo mirando solamente una hoja de papel en blanco. ¡Haz algo! Intenta encontrar un patrón, hacer una figura, trabajar algunos casos simples, intenta encontrar un problema relacionado más fácil y trabaja eso, cambia la notación, etcétera.

Aquí están algunas ideas de acciones que puedes hacer usualmente, siempre que no tengas idea de cómo atacar un problema.

1. **Busca un patrón:** Imagina que estás intentando encontrar la suma de los primeros números impares.

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1).$$

Trabaja con los números para valores pequeños de  $k$ .

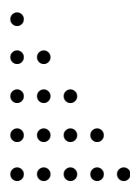
$$\begin{aligned}1 &= 1 \\1 + 3 &= 4 \\1 + 3 + 5 &= 9 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25\end{aligned}$$

¡Todas las respuestas son cuadrados perfectos! Con una pista como esta, será probablemente mucho más fácil encontrar por qué.

2. **Haz una figura:** Para un problema geométrico esto será obvio, pero puedes frecuentemente hacer figuras para algunos otros problemas. Por ejemplo, supón que quieres demostrar que:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aquí hay una figura que puede ayudar:



La suma es como un triángulo, que está obviamente relacionada al área de ese triángulo.

3. **Prueba algunos casos simples:** En el ejemplo anterior, prueba con los primeros valores de  $n$ . Cuando pruebes los valores, asegúrate de intentar con los primeros más fáciles. En otras palabras, no pruebes  $n = 4$  hasta que no hayas probado para  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$ , y  $n = 3$ . Recuerda intentar con cero. Si supones demostrar algo sobre un triángulo general, inténtalo en algunos triángulos que puedas calcular fácilmente, tales como un triángulo equilátero o un triángulo rectángulo 3-4-5.
4. **Resuelve un problema relacionado más simple:** Por ejemplo, si el problema pregunta acerca de los acomodos de reinas sobre un tablero de ajedrez, intenta resolverlo con tableros menores a un tablero de ajedrez de  $8 \times 8$ : observa en un tablero de  $1 \times 1$ , el tablero de  $2 \times 2$ , y más.
5. **Cambia la notación:** Si tu problema implica, por ejemplo, coeficientes binomiales, reemplázalos por sus equivalentes factoriales:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

6. **Piensa en problemas similares:** Si este problema te recuerda uno que has resuelto antes, ¿cómo resolviste aquel otro problema?

### 3 Técnicas Generales

Usualmente puedes aplicar las técnicas de la sección anterior siempre que no tengas idea de cómo comenzar. Las técnicas listadas a continuación son más específicas, pero es importante tenerlas todas presentes cada vez que te enfrentas a un nuevo problema. Recuerda que algunas veces hay muchas técnicas que funcionarán: para obtener una alta puntuación, todo lo que necesitas hacer es encontrar una de ellas.

1. **Dividir en Casos.** Si sabes cómo resolver el problema bajo ciertas condiciones, entonces puedes dividirlo en casos. También, fíjate en trabajar en todos los casos; por ejemplo, si el problema se refiere a líneas paralelas, asegúrate que tu solución trabaja si las líneas son paralelas. Si no, puede que tengas que probarlo como un caso especial.
2. **Observar Simetrías.** La Simetría puede ser geométrica o algebraica. Por ejemplo, si tienes que desarrollar el término  $(x + y + z)^5$ , y después de cierta

lucha, encuentras que el coeficiente de  $x^2y^2z$  es 30, entonces también será el coeficiente de  $x^2yz^2$  y  $xy^2z^2$  ya que la expresión original era simétrica en  $x$ ,  $y$ , y  $z$ .

3. **Usar Inducción.** Si puedes asignar un “tamaño” entero a cada versión de un problema y observar cómo el problema por grande que sea puede ser resuelto en función de problemas similares de menor tamaño, quizá la inducción funcionará. Como un ejemplo, supón que quieres demostrar que cualquier polígono (convexo o no) puede ser cortado en triángulos usando las diagonales que yacen dentro del polígono. Seguramente el menor polígono (un triángulo) puede ser dividido. Si puedes demostrar entonces que cualquier polígono puede ser dividido en dos polígonos menores con una diagonal, entonces puedes usar inducción para probar el resultado deseado.

El problema de “Las Torres de Hanoi” es otro buen ejemplo.

4. **Trabajar al revés.** Cientos de juegos trabajan de esta forma. Por ejemplo, supón que juegas un juego donde comienzas con una pila de 50 palillos, y un movimiento consiste en tomar 1, 2, 3 o 4 palillos de la pila. Alternas movimientos con tu oponente, y la primera persona incapaz de realizar movimiento pierde. Si tú mueves primero, ¿puedes asegurar una estrategia que asegure tu victoria?

50 es un lindo gran número, pero trabaja al revés. ¿Quién gana si la pila inicial tiene cero palillos? ¿1 palillo? ¿2 palillos? Trabaja al revés para ver qué posiciones son “seguras” para dejar al oponente. Cero palillos es claramente segura, y pilas con 1, 2, 3, o 4 palillos son inseguras. 5 es segura porque cualquier movimiento que tu oponente haga, lo deja en una posición insegura, etcétera.

5. **Considerar Paridad.** Algunos problemas tienen una condición par-impar. Dado un polígono con 101 lados que tiene un eje de simetría, demostrar que el eje pasa a través de un vértice. Esto es fácil si apareas cada vértice con el vértice simétrico con respecto al eje.
6. **Usar el Principio de las Casillas.** Si colocas más de  $n$  objetos en  $n$  cajas, al menos una caja tendrá más de un objeto en ella. En un grupo de 13 o más estudiantes, al menos dos cumplirán años el mismo mes.
7. **Demostración por Contradicción (Reducción al Absurdo).** Si no puedes demostrar algo, asume que es falso, y observa qué puedes concluir de eso. Si puedes concluir que algo es obviamente falso comenzando con esa

suposición, entonces tu suposición será errónea y el enunciado original será cierto.

Demuestra que existen infinitos números primos. Supongamos que no es cierto, que son finitos, y que  $P_1, P_2, \dots, P_n$  es la lista de todos los números primos. Entonces multipliquemos todos y sumémosle 1 al resultado:  $X = P_1 \cdot P_2 \cdots P_n + 1$ , no puede ser múltiplo de ningún  $P_i$ , esto es porque al dividir  $X$  entre  $P_i$  deja residuo 1. Entonces  $X$  es primo, o es producto de primos que no están en la lista. En cualquier caso, la suposición original de que había solo un número finito de primos, nos lleva a algo absurdo. Por lo tanto, hay un número infinito de primos.

8. **Buscar Invarianza.** Algunas veces, ésta es una propiedad de tu problema que es preservada sin importar qué operaciones sean realizadas. Aquí hay un buen ejemplo. Supongamos que comienzas con una barra de chocolate que tiene 8 cuadrados por 5 cuadrados y juegas de la siguiente manera. Si es tu turno de mover, puedes escoger una pieza (al principio, es claro que solo tienes la pieza original), y partirla a lo largo de una de las líneas entre los cuadrados. Por ejemplo, el primer movimiento puede ser partir la barra en una pieza de  $3 \times 5$  y otra pieza de  $5 \times 5$ . Si no puedes partir una pieza, tú pierdes.

Aquí está la Invarianza a considerar: después de cada movimiento, hay una pieza más, y el juego termina cuando hay 40. Esto es, no importa qué movimientos se hagan, el juego termina en exactamente 39 movimientos, así que no es realmente un juego del todo.

9. **Factorización en Primos.** Muchos problemas de divisibilidad pueden ser resueltos expresando cada entero como una única factorización de números primos. Mostrar que entre cualquier pareja de números primos hermanos, excepto el 3 y el 5, el número entre ellos es múltiplo de 6. (Dos números primos son "hermanos" si difieren en 2.) Cualquier conjunto de tres números consecutivos incluye uno que es múltiplo de 3. Luego, (excepto en el caso 3 y 5) ningún primo puede ser múltiplo de 3, y el número entre ellos debe serlo. Cada pareja de primos hermanos consiste de dos números impares y el número entre ellos debe ser múltiplo de 2. Así, cualquier número que es múltiplo de 2 y 3, al mismo tiempo, es múltiplo de 6.

## 4 Problemas de Ejemplo

Aquí está una lista de problemas de ejemplo, desvergonzadamente copiados de varias competencias. Estos problemas están sin solución; en su lugar, para cada uno piensa de cuántas maneras puedes trabajar para resolverlo, y piensa en figuras o diagramas que puedas dibujar.

1. El año  $1989 = 9 \cdot 13 \cdot 17$ . Calcula el próximo más grande que puede escribirse como el producto de tres enteros positivos en progresión aritmética, sabiendo que la suma de esos enteros es 57. (Una progresión aritmética es de la forma  $a, a + r, a + 2r, a + 3r, \dots$ )

2. Calcula el valor de:

$$\frac{(1990)^3 - (1000)^3 - (990)^3}{(1990)(1000)(990)}.$$

3. Si  $a + b = c$ ,  $b + c = d$ ,  $c + d = a$ , y  $b$  es un entero positivo, calcula el mayor valor posible para  $a + b + c + d$ .
4. Una cuerda de longitud constante se desplaza alrededor de un semicírculo. El punto medio de la cuerda y las proyecciones de sus extremos sobre la base, forman los vértices de un triángulo. Demuestra que el triángulo es isósceles y todos los posibles de dichos triángulos son semejantes.
5. ¿En cuántas maneras puede ser expresado el 10 como suma de 5 enteros no negativos cuando el orden es tomado en cuenta? En otras palabras,  $0 + 3 + 2 + 0 + 5$  es diferente de  $0 + 0 + 3 + 2 + 5$ .
6. Hay 100 soldados en una cuadrilla, y cada tarde tres de ellos están en guardia. ¿Puede ocurrir que después de cierto tiempo, cada soldado haya compartido cada guardia con otro soldado exactamente una vez?
7. Los números primos  $p$  y  $q$  y el número natural  $n$  satisfacen la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}.$$

Encuentra los números.

8. Hay 7 cristales sobre una mesa – todos boca abajo. Un movimiento consiste en voltear cualesquiera 4 de ellos. ¿Es posible que en algún momento se llegue a una situación donde todos los cristales queden boca arriba?

9. Demuestra que si dos cuadriláteros tienen los mismos puntos medios para cada uno de sus lados, entonces sus áreas son iguales.

10. ¿Para qué valores de  $a$  el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x^2 &= y^2, \\(x - a)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

tiene exactamente cero, una, dos, tres y cuatro soluciones, respectivamente?

11. Muestra que:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

12. Usando regla y compás, construye un trapezoide dadas las longitudes de sus lados.

13. Sobre cada cuadrado de un tablero de  $1997 \times 1997$  se escribe un 1 o -1. Para cada renglón  $i$ , sea  $R_i$  el producto de los números en ese renglón. Similarmente, sea  $C_i$  el producto de los números en la columna  $i$ . Demuestra que  $\sum_{i=1}^{1997} (R_i + C_i)$  nunca es igual a cero.

14. La sucesión  $\{a_n\}$ ,  $n \geq 0$  es definida como sigue:  $a_0$  es un número racional positivo menor que  $\sqrt{1998}$  y si  $a_n = p_n/q_n$ , para algunos enteros primos relativos  $p_n$  y  $q_n$ , entonces:

$$a_{n+1} = \frac{p_n^2 + 5}{p_n q_n}.$$

Muestra que  $a_n < \sqrt{1998}$  para toda  $n$ .

15. El Señor y la Señora Adams organizaron una fiesta, a la cual asistieron otras tres parejas. Ocurrieron varios apretones de manos. Nadie saludó a su propia pareja, nadie estrechó manos con otra persona dos veces, y por supuesto, nadie estrechó sus propias manos.

Después de que todos los apretones terminaron, el Señor Adams preguntó a cada persona, incluyendo a su esposa, cuántas manos había estrechado. Para sorpresa, cada quién dió una respuesta diferente. ¿Cuántas manos estrechó el Señor Adams?