

PRESENTACIÓN

Concursante ganador:

¡Felicidades!. Eres uno de los 96 ganadores del Primer Selectivo de Secundarias de la 21^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

La siguiente etapa es el examen estatal, que como ya sabes se llevará a cabo los días 11 y 12 de mayo. La mecánica de este examen es diferente a la del Primer Selectivo, por lo que hemos diseñado este curso-taller con la finalidad de que te sirva de guía en tu preparación hacia el examen estatal.

El material del curso consta de 4 partes:

Parte I. En esta parte se encuentra una descripción del formato del Examen Estatal y las diferencias con el examen del Selectivo de Secundarias. Básicamente las principales diferencias son que el examen se presenta en dos días y los problemas no son de opción múltiple por lo cuál tendrás que escribir sus soluciones.

Parte II. En ella encontrarás un poco de teoría y algunos resultados que serán herramientas útiles en el examen estatal. Quizá algunos resultados no los conozcas, sin embargo, pretendemos que te familiarices con ellos y puedas aplicarlos en la resolución de problemas.

Parte III. Esta sección comprende un conjunto de problemas, los cuales no son ejercicios rutinarios en los que tengas que aplicar directamente los conocimientos que adquieres en la escuela; son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Es por eso, que el mayor tiempo del taller se destinará a que tú intentes resolverlos.

Parte IV. Aquí se incluyen las soluciones a los problemas de la Parte III. Te entregaremos esta parte hasta el final del curso, con la intención de que no sientas curiosidad de ver la solución del problema antes de que intentes resolverlo. Esta parte te puede servir de guía, por si no te queda clara alguna solución, o si no se logran resolver todos los problemas en el curso.

Solo nos queda desearte que este curso-taller te sea de gran utilidad y que te sientas con la confianza de acercarte a nosotros en cualquier momento. Estamos para ayudarte y dirigirte en este camino que ya has empezado. Ánimo y mucha suerte.

LOS ENTRENADORES

Parte I: Introducción al Examen Estatal

El examen estatal, para el cual te estas preparando, presenta marcadas diferencias con los exámenes que hasta este punto has conocido. Con el objetivo de prepararte mejor, describiremos como es éste examen. El examen estatal se presenta en dos días, que serán el 11 y 12 de mayo (viernes y sábado), es decir, cada día presentarás un examen distinto. Cada uno de estos exámenes consta de 4 problemas para un total de 8, y tendrás un tiempo máximo de 4 ½ horas por día para resolverlos (en un día solo podrás entregar los problemas que corresponden al examen del mismo día) y entregar tu solución, se te darán más indicaciones en la fecha señalada. Si recordamos el selectivo de secundarias y comparamos con el estatal, notamos que en el primero disponíamos de menos tiempo (1 hora), y más problemas (15); de esto podemos concluir, y tendremos toda razón, que los problemas del examen estatal suponen una dificultad mayor a los del selectivo de secundarias.

Hay otra diferencia fundamental entre los dos exámenes que es importante señalar: el selectivo de secundarias es un examen de opción múltiple donde se califica únicamente si la respuesta es correcta o no; en cambio el examen estatal se responde a redacción libre y se califica tomando en cuenta varios aspectos, como las ideas que uses para resolver el problema, cada problema tiene una puntuación máxima de 7 puntos (que se obtiene en caso de resolver satisfactoriamente el problema). En general se puede decir que los problemas del examen estatal son “de otro tipo” si los comparamos con los del selectivo de secundarias.

Quizás esto último no te haya quedado muy claro, en general en esta sesión veremos que se entiende por “redacción libre” y como se debe entregar la solución de los problemas del examen.

Redacción libre

En el examen se te proporcionarán hojas en blanco para que en ellas redactes la solución que le das a los problemas. Como habíamos dicho se da mayor importancia al procedimiento que utilices para resolver cada problema, por eso es conveniente que conozcas y practiques la forma en que debe escribirse la solución de un problema, lo cual es lo que llamamos redacción libre.

En nuestra redacción deben estar incluidos de manera clara todos los pasos que seguimos para resolver el problema y cada uno debe estar debidamente justificado. Estas soluciones no son necesariamente únicas, ya que dependen del ingenio de cada quien, y distintas personas pueden presentar soluciones distintas. Si no lograste terminar el problema, es importante que redactes las ideas que tuviste y la forma en que procediste, para que éstas puedan ser calificadas.

Veamos algunos ejemplos de problemas de este tipo, resueltos con soluciones redactadas en forma adecuada, que nos ayudarán a entender mejor esto. El siguiente es un problema que apareció en un examen estatal de hace algunos años ;-)

“Hubo un robo en la joyería factorial. Los dos sospechosos son los empleados de la joyería: Combinado y Permutado. Ellos son los únicos que conocen la clave de seguridad (la cual consta de tres números naturales mayores que 1). De los dos uno siempre dice la verdad y el otro siempre miente. El inspector Tony los interroga y ellos responden:

Combinado. “Yo no fui”.

Permutado. “El primer número es el doble del segundo, que a su vez es el doble del tercero. Además si multiplicas los tres números el resultado es 2001.”

¿Quién es el ladrón?”

Hemos dicho que la solución debe consistir en la redacción de un procedimiento que resuelva el problema, si tratáramos de adivinar quien es el ladrón y simplemente escribimos una respuesta, incluso en caso de que esta sea correcta, no recibiríamos puntuación alguna. De igual forma podríamos perder puntuación si nuestra redacción no está debidamente justificada.

Veamos el ejemplo de una solución al problema debidamente redactada:

“Analicemos lo que dijo permutado, si fuera verdad la combinación serían tres números tal que su producto sea 2001 y cumplan con la condición que el primer número es el doble del segundo, que a su vez es el doble del tercero. Pero si factorizamos 2001 tenemos que $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, los cuales en ningún orden cumplen la condición dada.

Entonces lo que dice permutado no puede ser verdad, o sea que Permutado miente y Combinado dice la verdad. Por tanto Permutado es el ladrón.”

Notemos que aunque la redacción anterior es breve, en ella se ve de manera clara y justificada que nuestra solución es sin duda correcta. En general lo extenso de nuestra redacción no debe preocuparnos mientras ésta sea correcta.

A continuación veamos otro problema esencialmente distinto, que nos ejemplificará un importante concepto.

“Considérese una cuadrícula de n filas por m columnas, con un número (no necesariamente entero) escrito en cada cuadrado, de tal forma que la suma de los números en cada fila y en cada columna es igual a 1. Demuestra que $n=m$.”

A diferencia del problema anterior, éste no nos pide encontrar resultado alguno, si no nos pide demostrar una propiedad (que $n=m$), ¿que significa esto?

Bien, podemos definir demostración como un *proceso por el cual, mediante una serie de razonamientos lógicos, se llega a establecer la verdad de un enunciado a partir de ciertos datos que tenemos previamente.*

Ahora identifiquemos los elementos de la definición en nuestro problema, nosotros queremos, según la definición “establecer la verdad de un enunciado” en este caso el enunciado es que m es igual a n , esto lo haremos “partiendo de ciertos datos que tenemos previamente” estos datos son que los números en cada una de las filas como en cada una de las columnas de la cuadrícula suman 1. Ahora bien lo que nosotros debemos encontrar es el método de probar el enunciado, según la definición debemos hallar “mediante una serie de razonamientos lógicos” que nos lleven a la veracidad del enunciado.

Una vez entendido lo que es una demostración veamos un ejemplo de solución al problema anterior:

“Sumemos todos los números de la cuadrícula de la siguiente manera: efectuemos la suma de todos los números de cada una de las filas y después sumemos todos los resultados obtenidos, por los datos del problema sabemos que cada una de las filas suma 1, y cuando sumemos todos estos resultados tendremos una suma de esta forma: $1+1+1+1+\dots+1+1+1$ donde habrá n números 1, ya que hay n filas. Por lo tanto la suma de todos los números de la cuadrícula es igual a n . Ahora efectuemos nuevamente la suma de todos los números de la cuadrícula pero de forma distinta: efectuemos la suma de todos los números de cada una de las columnas y después sumemos todos los resultados obtenidos, por los datos del problema sabemos que cada una de las columnas suma 1, y cuando sumemos todos estos resultados tendremos una suma de esta forma: $1+1+1+1+\dots+1+1+1$ donde habrá m números 1, ya que hay m columnas. Por lo tanto la suma de todos los números de la cuadrícula es igual a m . Como la suma de los números de la cuadrícula es igual a n y también es igual a m , se concluye que $n=m$.”

La importancia de este ejemplo radica en que la mayoría de los problemas en el examen estatal están involucrados directa o indirectamente con el concepto de demostración, así que en este curso le pondremos énfasis a este tipo de problemas. Es importante que de ahora en adelante cuides tener una buena redacción en los problemas que resuelvas.

Parte II : Teoría Básica

Este material se espera que pueda ser usado como de consulta o para un repaso muy breve de la teoría básica que es necesaria para resolver los problemas de olimpiada. Se encuentra dividido en dos partes: Álgebra y Geometría.

Algebra

1.1 Definiciones

1) Números naturales

$$1, 2, 3, \dots$$

2) Números enteros

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

3) Números racionales: Son cocientes de dos números enteros.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{5}{4} \quad -\frac{1}{5} \quad -\frac{2}{3}$$

4) Número par: Son los enteros divisibles por 2.

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

Notación: Un número par se denota como $2n$

5) Número impar: Son los enteros cuyo residuo al dividirlos entre 2 es 1.

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

Notación: Un número impar se denota como $2n \pm 1$

1.2 Paridad

“Todo número natural es par o impar”

Dos números tienen la misma paridad si ambos son pares o impares.

Reglas de paridad

$$\begin{aligned} \text{par} \pm \text{par} &= \text{par} \\ \text{impar} \pm \text{impar} &= \text{par} \\ \text{par} \pm \text{impar} &= \text{impar} \\ \text{par} * \text{par} &= \text{par} \\ \text{impar} * \text{impar} &= \text{impar} \\ \text{par} * \text{impar} &= \text{par} \end{aligned}$$

Ejemplo: Será posible la siguiente igualdad poniendo en cada espacio (_) el signo de suma o resta.

$$1 _ 2 _ 3 _ 4 _ 5 _ 6 \dots _ 2007 = 513$$

Solución:

Nótese que en la serie de números existen 1003 números pares y se sabe de las reglas de paridad que la suma o resta de pares es par. Por lo tanto no importa como se pongan los signos al sumar o restar los 1003 números pares el resultado siempre es par. También en la serie de números existen 1004 números impares y se sabe de las reglas de paridad que la suma o resta de parejas de impares es par. Por lo tanto no importa como se pongan los signos al sumar o restar los 1004 números impares el resultado siempre es par. De esta forma al sumar los dos resultados anteriores el resultado siempre será un número par y como 513 es impar no puede ser posible la igualdad.

1.3 Divisibilidad

Un número es divisible entre otro cuando lo contiene exactamente un número entero de veces. En otras palabras si dividimos un número entre otro número, el cociente debe ser: entero y el residuo debe ser cero.

Ejemplo: 9 es divisible entre 1,3, 9
pues:

$$\frac{9}{1} = 9 \quad \frac{9}{3} = 3 \quad \frac{9}{9} = 1$$

Números primos: Son los números naturales distintos del 1 que tienen exactamente dos divisores, la unidad y ellos mismos.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$$

Teorema: Todo número mayor que 1 puede descomponerse en un producto de factores primos.

Ejemplo:

$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

A continuación te damos algunos criterios de divisibilidad que te facilitarán la búsqueda de factores primos.

Divisibilidad por 2

Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o en un número par. Ejemplo: 58.

Divisibilidad por 3

Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3. Por ejemplo: 168351 es divisible por 3 pues $1 + 6 + 8 + 3 + 5 + 1 = 24$, el cual es múltiplo de 3.

Divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en cinco. Ejemplo: 30.

Divisibilidad por 6

Un número es divisible por 6 cuando dicho número es divisible por 2 y por 3 al mismo tiempo. Ejemplo: 24

Divisibilidad por 9

Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9. Ejemplo: 585, pues $5 + 8 + 5 = 18$, el cual es múltiplo de 9.

Divisibilidad por 11

Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de sus dígitos que ocupan un lugar impar, y la suma de los dígitos de lugar par, de derecha a izquierda, es cero o múltiplo de 11. Ejemplo: ¿ 94378 es divisible por 11 ?

Los números que ocupan posiciones pares de derecha a izquierda son: 7 y 4

Los números que ocupan posiciones impares son: 8, 3, 9

Además: $7 + 4 = 11$ y $8 + 3 + 9 = 20$

Entonces $20 - 11 = 9$, luego 94378 no es divisible por 11.

1.3.1 Mínimo Común Múltiplo (MCM)

Para encontrar el MCM de dos o más números se multiplican los factores primos comunes y no comunes de los números.

Ejemplo: Hallar el MCM de 27, 18 y 12

27	18	12	2	$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3 = 108$ MCM = 108
27	9	6	2	
27	9	3	3	
9	3	1	3	
3	1	1	3	
1	1	1		

1.3.2 Máximo Común Divisor (MCD)

Para encontrar el MCD de varios números enteros se multiplican los factores primos comunes de los números tomados con sus menores exponentes.

Ejemplo: El MCD de 27, 18, y 12 es 3.

1.3.3 Residuos

Ejemplo: Se tiene un edificio de dos pisos con los cuartos numerados como en la figura

1	3	5	7	9
Ad.	2	4	6	8

¿En que piso localizamos el cuarto No. 98?

Solución: En la planta baja (Ad.), pues claramente observamos que en el segundo piso están los cuartos con números impares y en la planta baja, los de números pares.

Ejemplo: Se tiene un edificio de cinco pisos con los cuartos numerados como en la figura.

4	9	14	19	24
3	8	13	18	23
2	7	12	17	22
1	6	11	16	21
Ad.	5	10	15	20

¿En que piso localizamos el cuarto No. 98?

Solución: En el problema anterior, por su sencillez, pudimos mentalmente dividir al conjunto de los enteros (positivos) en dos clases ajenas: pares e impares. En este segundo problema tenemos que dividirlos en 5 clases ajenas y ser capaces de ubicar a cualquier entero en alguna de ellas.

Si observamos detenidamente la figura, podemos ubicar a los cuartos de la siguiente manera:

No. de Piso	Característica	Forma
Primer piso:	Múltiplos de 5	$5k$
Segundo piso:	Los que exceden en una unidad a un múltiplo de 5	$5k+1$
Tercer piso:	Los que exceden en dos unidades a un múltiplo de 5	$5k+2$
Cuarto piso:	Los que exceden en tres unidades a un múltiplo de 5	$5k+3$
Quinto piso:	Los que exceden en cuatro unidades a un múltiplo de 5	$5k+4$.

Después de este pequeño análisis, podemos decir que el cuarto No. 98 se encuentra en el cuarto piso, pues $98 = 5(19) + 3$.

Obsérvese que los del primer piso son aquellos que al dividirse entre 5 dejan residuo cero, los del segundo piso son aquellos que al dividirse entre 5 dejan residuo 1 y así sucesivamente.

Ahora con esto notemos lo útil que nos puede servir sacar los residuos de un número al dividirlo entre otro.

1.4 Productos Notables

Binomio al cuadrado	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Binomio al cubo	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Binomios conjugados	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Leyes de los exponentes

$$a^0 = 1 \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Factorizaciones:

Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Resta de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplo: Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que: $5 = a^2 - b^2$

Solución: Factorizando se obtiene: $5 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Además es claro que $a + b > a - b$ ya que a y b son positivos. Luego como 5 es primo, entonces uno de los factores es 1 y el otro es 5 y usando la desigualdad anterior tenemos que $1 = a - b$ y $5 = a + b$. Por lo tanto al sumar las dos ecuaciones se obtiene: $6 = 2a$, entonces $a = 3$ y por lo tanto $b = 2$, con lo cual se concluye que los números (a, b) que cumplen esa condición son (3, 2) respectivamente.

1.5 Técnicas de Conteo

Teorema (Fórmula de Gauss) La suma de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ejemplo: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2007 = \frac{2007 \times 2008}{2} = 2007 \times 1004 = 2015028$

Ejemplo: Anita lee un libro de la siguiente forma:

El primer día lee 5 páginas,

El segundo día lee 2 páginas más que el primer día (es decir 7 páginas),

El tercer día lee 2 páginas más que el segundo día (es decir lee 9 páginas)

Y así sucesivamente.

Si Anita terminó de leer el libro en 100 días ¿Cuántas páginas tienen el libro?

Solución: El número de páginas del libro es igual a la suma de páginas leídas cada día hasta completar 100 días:

$5+7+9+11+\dots$

Notemos que si le resto 3 unidades a cada sumando, me quedarán los primeros 100 pares es decir:

$(3+2) + (3+4) + (3+6) + \dots = 3(100) + 2+4+6+8+10+12+14+\dots+200$

Notemos que esto es igual a $3(100) + 2(1+2+3+4+5+6+\dots+100)$ lo cual por la fórmula de Gauss es igual a: $300 + 2(100 \times 101 / 2) = 300 + 100 \times 101 = 10400$.

Principio de las Casillas

“Si 7 objetos se quieren repartir en 6 casillas, en una casilla hay 2 objetos”

“Si $(n+1)$ objetos se deben de acomodar en n casillas, en alguna de las casillas hay más de un objeto”

Ejemplo: Si tengo cuatro números, siempre hay dos cuya resta es un múltiplo de tres.

Solución: Es fácil notar que en cualquier número su residuo al dividir entre 3 es 0, 1 o 2 por lo tanto al darle a los cuatro números un residuo por principio de las casillas necesariamente hay dos que tienen el mismo residuo, por lo que al restarlos su residuo se volvería 0 con lo que sería múltiplo de 3. (En este ejemplo los objetos serían los 4 números y las casillas los tres residuos: 0, 1, 2)

Principio Fundamental de Conteo

Si una cierta tarea puede realizarse de m maneras diferentes y, para cada una de esas formas, una segunda tarea puede realizarse de n maneras distintas, entonces las dos tareas juntas pueden realizarse (en ese orden) de mn formas diferentes.

Ejemplo: Karina tiene tres blusas y cuatro faldas distintas, ¿de cuántas formas puede vestirse?

Solución: Las formas de ponerse una blusa son de 3 maneras diferentes y para cada una de estas las maneras de ponerse una falda son 4 maneras distintas, entonces por el principio

fundamental del conteo las maneras de colocarse una blusa y una falda puede realizarse de $3 \times 4 = 12$ maneras diferentes.

Factorial

Para un entero $n \geq 0$

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$

$$0! = 1 \quad 1! = 1$$

Ejemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

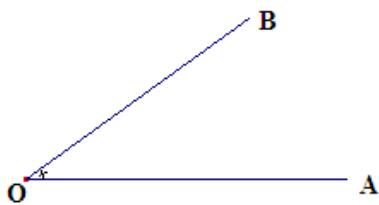
Ejemplo: ¿Cuántos números se pueden escribir con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 sin repetirse y usando todos?

Solución: Usando el *principio fundamental del conteo*, para el primer dígito tenemos 6 formas (1, 2, 3, 4, 5, 6), para el segundo dígito tenemos 5 (le quito el que puse de primero), ..., para el sexto tenemos 1 manera (al quitarle los 5 primeros), y ya no hay más (ya que no se pueden repetir) por lo tanto hay $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ números con estas condiciones. Es decir $6!$ Números.

Geometría

2.1 Definiciones

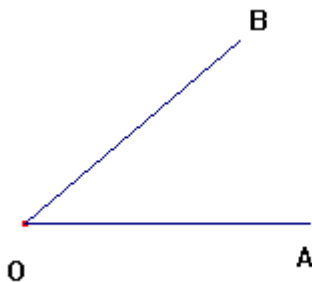
Ángulo: Abertura de 2 rectas que se encuentran.



$\angle BOA$

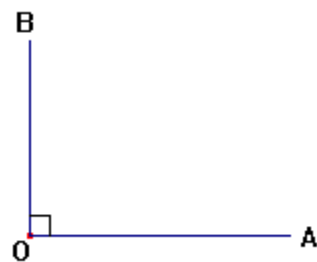
$\angle AOB$

Ángulo agudo: Ángulo que mide menos de 90° .



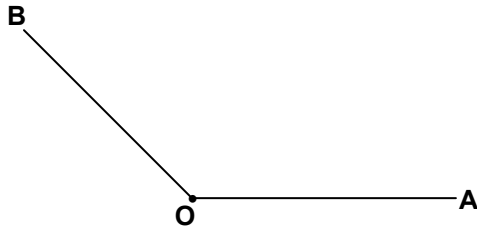
$\angle BOA < 90^\circ$

Ángulo recto: Ángulo que mide 90° .

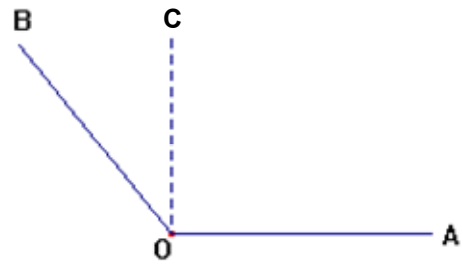


$\angle BOA = 90^\circ$

Ángulo obtuso: Mide más de 90° y menos de 180° . Ángulos adyacentes: Tienen el mismo Vértice y un lado común.

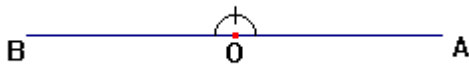


$$90^\circ < \angle BOA < 180^\circ$$



$\angle BOC$ y $\angle COA$ son adyacentes

Ángulo llano: Mide 180° .



$$\angle BOA = 180^\circ$$

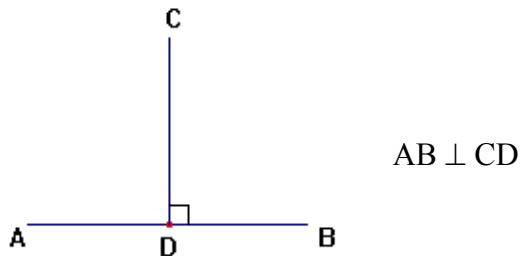
Rectas Paralelas

Son rectas que se hallan en un mismo plano y no se encuentran por más que se prolonguen.

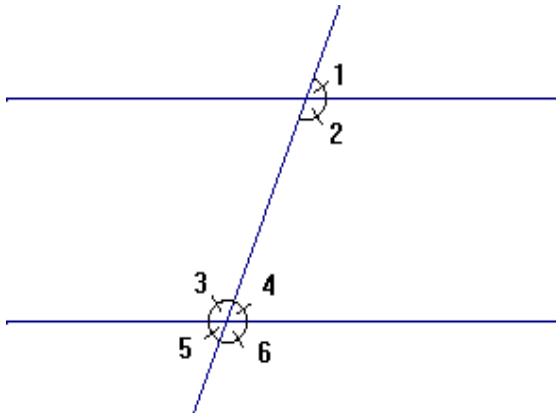


Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuándo los ángulos adyacentes que forman la una con la otra son iguales.



Ángulos entre paralelas



- $\angle 1$ y $\angle 4$ son correspondientes
- $\angle 2$ y $\angle 3$ son alternos internos
- $\angle 1$ y $\angle 5$ son alternos externos
- $\angle 2$ y $\angle 4$ son colaterales internos
- $\angle 1$ y $\angle 6$ son colaterales externos

- Los ángulos correspondientes miden lo mismo.
- Los ángulos alternos internos y externos miden lo mismo.
- Los ángulos colaterales internos y externos son suplementarios.

Entonces:

$$\angle 1 = \angle 4$$

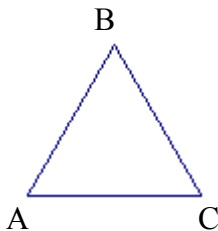
$$\angle 2 = \angle 3, \angle 1 = \angle 5$$

$$\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ, \angle 1 + \angle 6 = 180^\circ$$

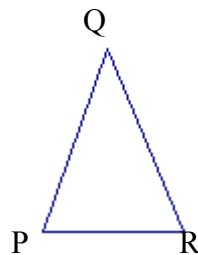
2.2 Triángulos

Definición: Llámese triángulo al espacio limitado por tres rectas que se cortan.

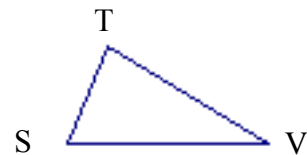
- Clasificación según sus lados:



Equilátero



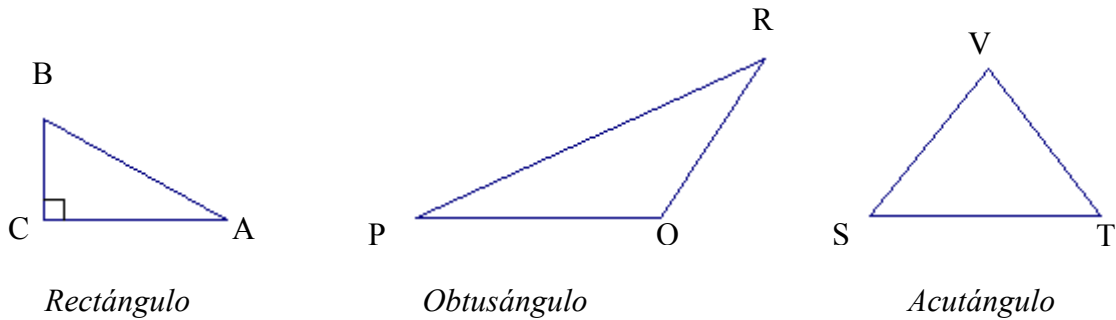
Isósceles



Escaleno

- Triángulo Equilátero. Tres lados iguales.
- Triángulo Isósceles. Dos lados iguales y el otro desigual.
- Triángulo Escaleno. Tres lados desiguales

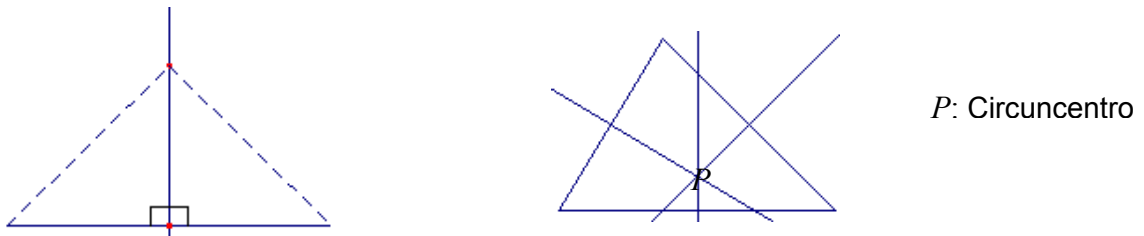
- Clasificación según sus ángulos:



- Triángulo Rectángulo. Cuando tiene un ángulo recto.
- Triángulo Obtusángulo. Cuando tiene un ángulo obtuso.
- Triángulo Acutángulo. Cuando sus tres ángulos son agudos.
- Triángulo Equiángulo. Cuando sus tres ángulos son iguales; el triángulo equilátero es a la vez equiángulo.

Mediatriz

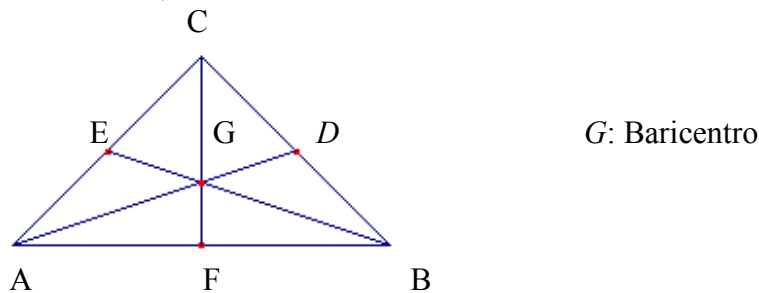
Es la perpendicular a un segmento en su punto medio. A la intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo se le conoce como Circuncentro.



Este punto cumple que la distancia desde este a cualquier vértice del triángulo es la misma (Es el centro de la circunferencia circunscrita de un triángulo).

Mediana

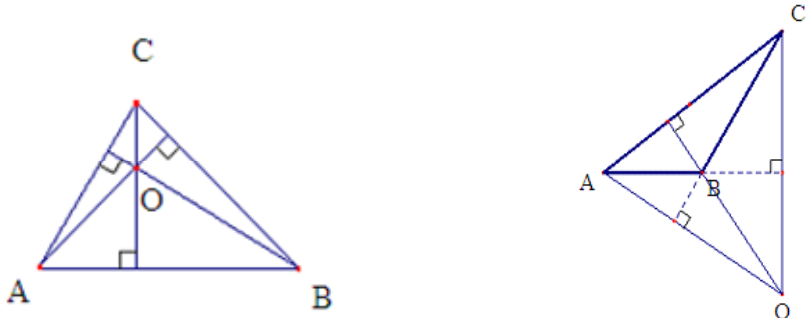
Se llama mediana de un triángulo a cada uno de los tres segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado Baricentro, Centroide o Gravicentro.



Este punto cumple que: $\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2$

Altura

Se llama base de un triángulo a cualquiera de sus lados. El segmento perpendicular desde un vértice a la base opuesta o a su prolongación se llama altura. Las tres alturas de un triángulo o sus prolongaciones se cortan en un punto llamado Ortocentro.

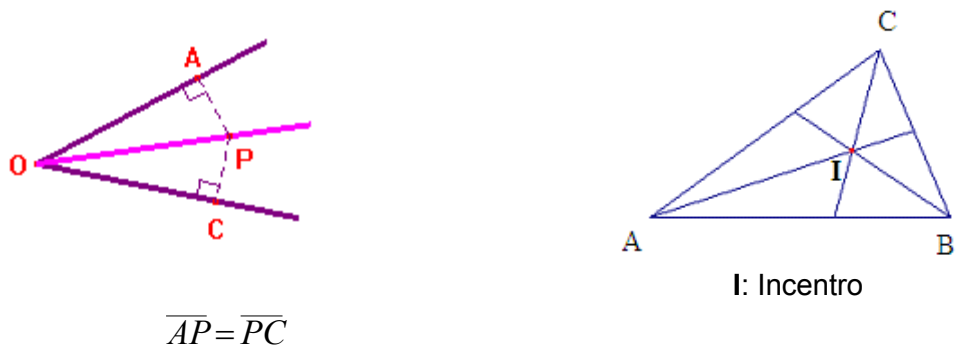


O: Ortocentro

Este punto cumple la propiedad de que es el incentro del triángulo formado por los pies de alturas del triángulo.

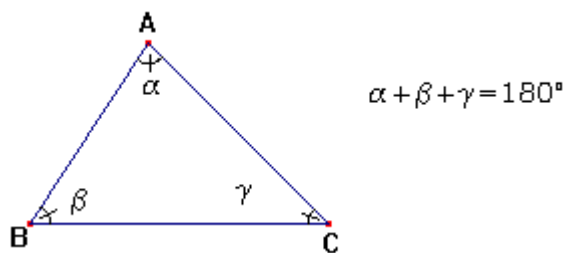
Bisectriz

Bisectriz de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos ángulos iguales. Las bisectrices en un triángulo se cortan en un punto llamado Incentro.

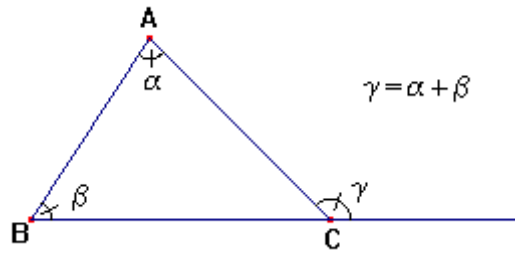


Este punto cumple que la distancia desde este a los lados de un triángulo es la misma (es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo).

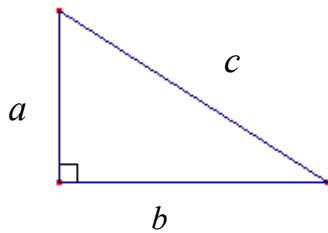
Teorema: La suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180° .



- Un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.



- **Teorema de Pitágoras.** En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

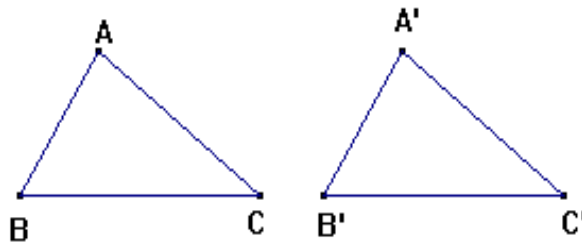
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Congruencia de triángulos

- Dos triángulos se dicen que son **congruentes** si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Si dos triángulos son congruentes sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales.

El símbolo de congruencia es \cong .



$$AB \cong A'B', BC \cong B'C', AC \cong A'C'; \angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C'$$

Para establecer que dos triángulos son congruentes se utilizan los siguientes criterios:

Criterio LAL

Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales entonces los triángulos son congruentes.

Criterio ALA

Si dos triángulos tienen iguales respectivamente un lado y los ángulos adyacentes a él entonces los dos triángulos son congruentes.

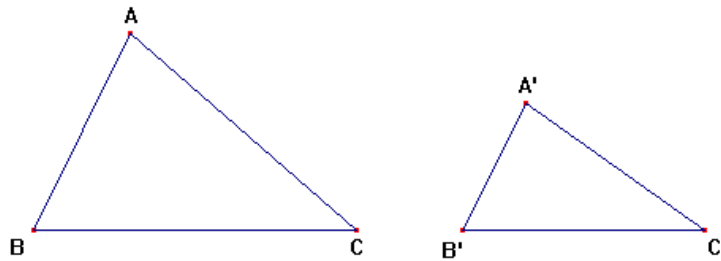
Criterio LLL

Si tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro triángulo entonces los triángulos son congruentes.

- En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.
- Si dos ángulos de un triángulo son iguales los lados opuestos a dichos ángulos también son iguales.

Semejanza de triángulos

- Dos triángulos se dicen que son **semejantes** si sus ángulos son iguales y sus lados respectivos son proporcionales.



$$\angle A = \angle A' \quad \angle B = \angle B' \quad \angle C = \angle C' \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Para establecer que dos triángulos son semejantes se utilizan los siguientes criterios:

Criterio AAA

Si dos triángulos tienen los mismos ángulos, entonces son semejantes.

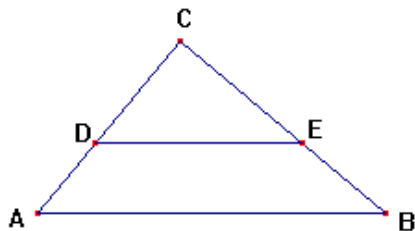
Criterio LAL

Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes.

Criterio LLL

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro, entonces los dos triángulos son semejantes.

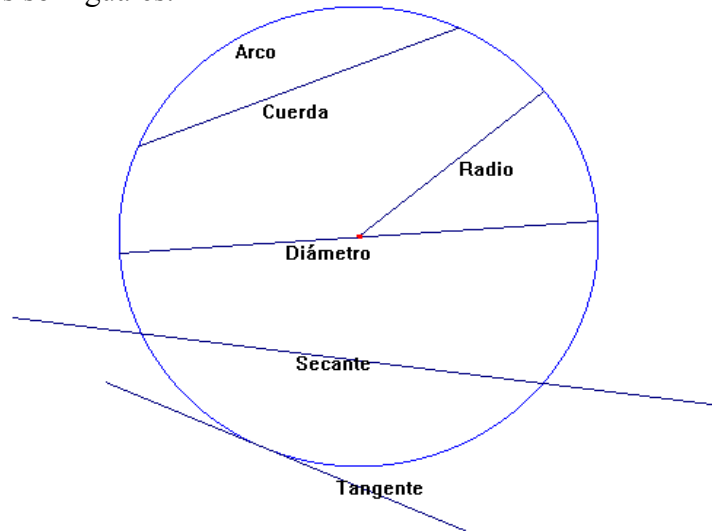
- Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo lo divide en partes proporcionales.



$$DE \parallel AB \qquad \frac{CD}{AD} = \frac{CE}{EB}$$

2.3 Circunferencia

- La circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. A la distancia fija se le llama radio.
- Todos los radios son iguales.



Cuerda: Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

Diámetro: Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Es la cuerda más grande.

La **recta secante** a una circunferencia es una recta que interseca a la circunferencia en dos puntos.

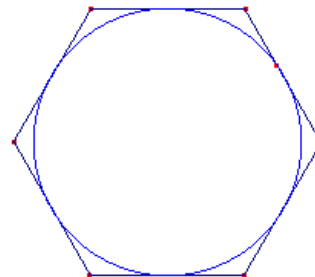
La **recta tangente** a una circunferencia es la recta que interseca a la circunferencia en un solo punto.

Un **arco** es una parte continua de la circunferencia.

- Una **circunferencia circunscrita** a un polígono es una circunferencia que pasa por todos los vértices del polígono.
- Una **circunferencia inscrita** a un polígono es una circunferencia para la cual los lados del polígono son tangentes.

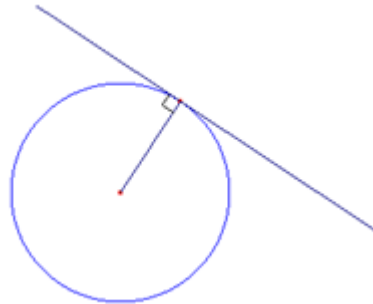


Circunferencia circunscrita

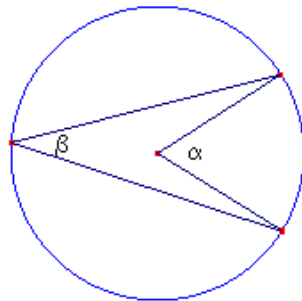


Circunferencia inscrita

- Una recta tangente es perpendicular al radio trazado en el punto de contacto de la recta con la circunferencia.



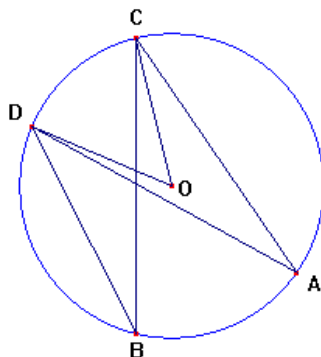
- Un ángulo central es aquel cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son radios. La intersección de los lados con la circunferencia determinan un arco.
- Un ángulo inscrito a una circunferencia es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas. La intersección de los lados con la circunferencia determina un arco.



$\alpha =$ ángulo central

$\beta =$ ángulo inscrito

- La medida de un ángulo central es la medida del arco que interseca.
- La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco que interseca.
- Ángulos inscritos en un mismo arco son iguales.



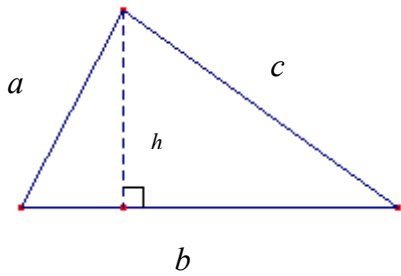
$$\angle COD = \text{arco DC}$$

$$\angle DBC = \angle DAC$$

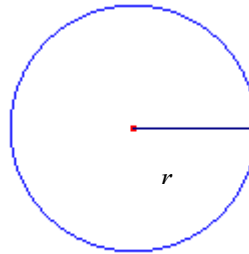
$$\angle DBC = \frac{1}{2} \text{ arco DC}$$

- Ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.

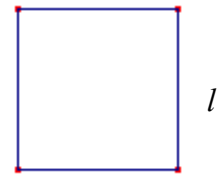
2.4 Áreas y Perímetro



$$A = \frac{bh}{2}$$

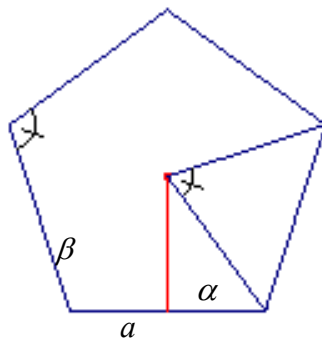


$$A = \pi r^2$$



$$A = l^2$$

p : perímetro
 a : apotema
 α : ángulo central
 β : ángulo interno



$$A = \frac{p \times a}{2} \quad p: \text{perímetro}$$

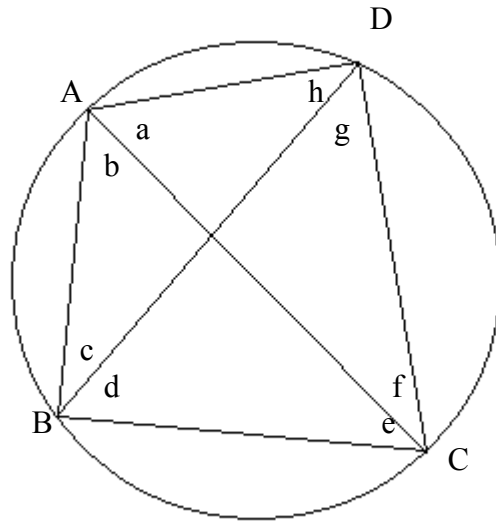
2.5 Cuadriláteros.

Cuatro puntos tomados al azar no se encuentran por lo general sobre una circunferencia. Cuando cuatro puntos (o mas) se encuentran sobre una circunferencia decimos que son concíclicos (o mas brevemente cíclicos).

Teorema: Un cuadrilátero es cíclico si y solamente si tiene dos ángulos opuestos suplementarios.

Un resultado practico:

Para un cuadrilátero convexo ABCD podemos, además de ver los ángulos en A, en B, en C y en D, considerar otros ocho ángulos, que se forman con los lados del cuadrilátero y las diagonales AC y BD, denotaremos por a, b, c, d, e, f, g, h como se señala en el dibujo siguiente:



Si el cuadrilátero es cíclico se tiene:

- (i) $\angle A + \angle C = 180^\circ$
- (ii) $\angle B + \angle D = 180^\circ$
- (iii) $a = d$
- (iv) $b = g$
- (v) $c = f$
- (vi) $e = h$

Cuadriláteros Especiales.

Un **Trapezio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. A los lados paralelos del trapezio les llamamos **bases**. Si los lados no paralelos del trapezio son iguales decimos que el **trapezio es isósceles**.

Teorema: un trapezio es cíclico si y solo si es un trapezio isósceles.

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.

Teorema: Un cuadrilátero es un **paralelogramo** si y solamente si sus diagonales se bisecan mutuamente.

Un **rombo** es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre si.

Teorema: Un cuadrilátero es un **rombo** si y solamente si sus diagonales se bisecan perpendicularmente entre si.

Un **rectángulo** es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.

Teorema: Un cuadrilátero es un **rectángulo** si y solamente si sus diagonales se bisecan mutuamente y miden lo mismo.

Un **cuadrado** es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre si.

Teorema: Un cuadrilátero es un **cuadrado** si y solamente si sus diagonales son iguales y se bisecan perpendicularmente entre si.

PARTE III: PROBLEMAS

Problema 1. Pedro, Quico, Rosa, Sandra Y Tobías, se saludan entre sí. Pedro saluda a una sola persona y Quico también saluda a una sola persona. Rosa, Sandra y Tobías saluda, cada una, a dos personas. Así se sabe que Pedro saludó a Tobías. ¿Rosa saludó a Sandra?

Problema 2. ¿Cuántos enteros positivos n hay tales que $\frac{2n+19}{n+2}$ es entero?

Problema 3. Una cuadrícula de 3×3 esta inicialmente llena con ceros y unos de la siguiente manera:

1	0	1
0	1	0
1	0	1

La cuadrícula se ira modificando con la siguiente regla:

Cada que se coloque una cuadrícula de 2×2 sobre la cuadrícula original, se aumentan en 1 los números de los cuadrados comunes. Por ejemplo si la cuadrícula de 2×2 se coloca arriba y a la izquierda del tablero de 3×3 , este queda modificado así:

2	1	1
1	2	0
1	0	1

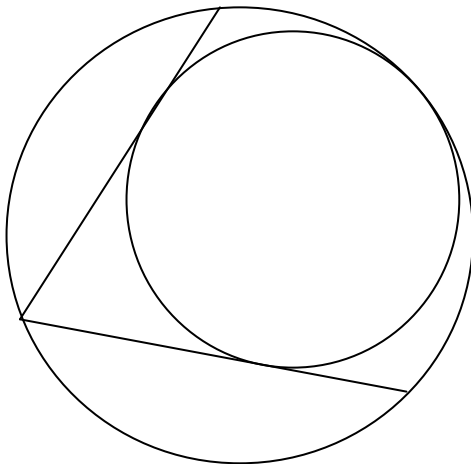
¿Es posible, repitiendo la regla, llegar a un tablero de 3×3 donde todos los números sean múltiplos de 2?

Si lo es, de una forma de hacerlo, en caso contrario argumente por que no es posible.

Problema 4. Drini participa en un juego de mesa en el que en cada turno tiene que pagar \$100 y tirar un dado. Si cae 1 o 2, gana \$400; si cae 3 paga otros \$200; si cae 4 le

devuelven sus \$100; y si caen 5 o 6 gana \$1000. Si inicialmente tiene \$2000, ¿es posible que en algún momento llegue a tener \$12000 exactamente?

Problema 5. Dentro de un círculo de radio uno se encuentra otro círculo que es tangente al primero y a un ángulo de 60° inscrito en el primero, cuya bisectriz es un diámetro. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia?



Problema 6. En un examen selectivo de la olimpiada de magos, se reunieron en la gran mesa redonda los discípulos de merlín y del maligno mago Fumanchú, siendo en total $2n + 1$ participantes. En eso, el mago-entrenador Drini aparece, y al mirar la forma en que estaban sentados comenta: “hay dos discípulos del mismo maestro que están separados por n asientos”. Demuestra que sin importar la forma en que estaban sentados, ni cuantos eran los discípulos de merlín o de Fumanchú, la aseveración de Drini es cierta.

Problema 7. La colección infinita de números 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, ... se ha formado de la manera siguiente: se coloca el primer impar (1), luego se colocan los siguientes dos pares (2, 4), después los tres impares siguientes al último par colocado (5, 7, 9), luego los cuatro pares siguientes al último impar que se colocó y así sucesivamente. ¿Cuál es el número par más cercano a 2007 que aparece en la colección?

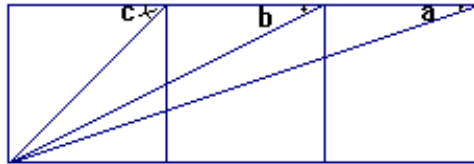
Problema 8. María y Elena tienen 10 esferas colocadas de la siguiente manera: 1 en la primera columna, 2 en la segunda columna, 3 en la tercera y 4 en la cuarta. Cada una de ellas puede retirar desde una hasta el total de esferas que existan en una columna. Pierde la que retire la última esfera. Así inicia María, ¿existe alguna estrategia para que gane?

Problema 9. ¿Cuántos números múltiplos de 6 menores que 1000 tienen la propiedad de que la suma de sus cifras es 21?

Problema 10. El círculo I circunscribe a un cuadrado y el círculo II está inscrito en el mismo cuadrado. ¿Cuál es la razón de las áreas del círculo I al círculo II?

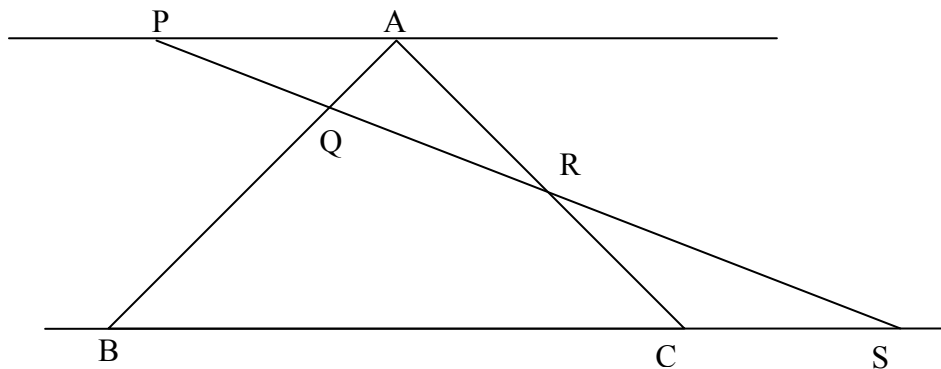
Problema 11. ¿Cuántas maneras hay de llenar un tablero de 3 x 3 con ceros y unos de modo que cada cuadrado de 2 x 2, se cumpla que la suma de sus cuatro números sea par?

Problema 12. Demuestra que $c = a + b$



Problema 13. Se tienen 2004 fichas hexagonales con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 escritos uno en cada lado en sentido de las manecillas del reloj. Se va a formar una cadena con todas las fichas siguiendo las reglas de dominó; es decir, dos fichas se unen por uno o más lados si los números escritos en los lados que comparten son iguales en ambas fichas. Después de hacer la cadena se suman los números que no son compartidos para unir dos fichas. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener esa suma?

Problema 14. En la figura, ABC es un triángulo equilátero, sus lados tienen longitud 3 y PA es paralela a BC. Si $PQ = QR = RS$, ¿cuál es la longitud de CS?



Problema 15. Un número es suertudo si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo, 1900 es suertudo, ya que

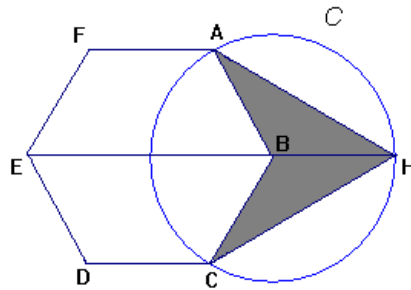
1900 \rightarrow 82 \rightarrow 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1. Encuentre una infinidad de parejas de enteros consecutivos, donde ambos números sean suertudos.

Problema 16. Se colorea un plano de dos colores. Demuestra que existe un triángulo equilátero cuyos vértices son del mismo color.

Problema 17. Sobre la base AB de un triángulo isósceles se elige un punto arbitrario X. Desde P y Q, puntos medios de AX y XB, respectivamente, se trazan perpendiculares a la base que cortan AC y CB en los puntos H y K, respectivamente. Demostrar que AH=CK y HC=KB.

Problema 18. Sea n un entero positivo. Prueba que si $3n + 1$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ es la suma de tres cuadrados perfectos (por ejemplo, cuando $n = 40$, se tiene que $3n + 1 = 121 = 11^2$ y $n + 1 = 41 = 6^2 + 2^2 + 1^2$).

Problema 19. En la figura, ABCDEF es un hexágono regular y C es un círculo con centro en B. Si el área del hexágono es igual a 1, ¿a cuánto es igual el área sombreada?



Problema 20. Se tiene escrito sobre un pizarrón once números 1. Una posible operación es tomar dos números y sumarle a ambos 1, restarle a ambos 1 ó sumarle a uno de los números 1 y restarle 1 al otro. ¿Es posible mediante estas operaciones tener escritos en el pizarrón once números 10?

Problema 21. Los puntos Q y R se encuentran en el círculo X, y P es un punto tal que PQ y PR son tangentes a X. El punto A se encuentra en la extensión de PQ, y Z es el circuncírculo del $\triangle PAR$. El círculo Z corta a X otra vez en B, y AR corta a X en el punto C. Probar que $\angle PAR = \angle ABC$.

Problema 22. ¿Cuántos elementos tiene el subconjunto más grande S de $\{1, 2, 3, 4, \dots, 50\}$ con la propiedad de que ningún par de elementos de S tiene suma divisible entre 7?

Problema 23. Los números 1, 2, ..., 25 se escriben en algún orden dentro de los cuadrados de un tablero de 5 x 5. ¿Es posible que en todos los cuadrados de 2 x 2 la suma de sus cuatro números sea menor o igual a 40?

Problema 24. Sea ADE un triángulo rectángulo con el ángulo recto en D, y sea C el punto medio de AE. Se traza una circunferencia que pasa por A y por C y cuyo centro O está sobre el lado AD. Prueba que $AO \cdot AD = AC^2$.

PARTE IV: SOLUCIONES

Solución 1. Pedro solo saludo a Tobías. Si Tobías fuera la única persona a la que saludo Quico, entonces los dos saludos que tiene Rosa y Sandra deberían provenir de saludarse mutuamente, lo cual no tiene sentido pues entre ellas solo necesitan saludarse una vez. Por lo tanto, Quico y Tobías no se saludaron. Si Quico saludo a Rosa, entonces Tobías saludo a Sandra y Rosa y Sandra se saludaron. Análogamente, si Quico saludo a Sandra, entonces Tobías saludo a Rosa y Rosa saludo a Sandra. Por lo tanto, Sandra y rosa si se saludaron.

Solución 2. Veamos que $\frac{2n+19}{n+2} = \frac{2(n+2)}{n+2} + \frac{15}{n+2} = 2 + \frac{15}{n+2}$, de donde $n+2$ tiene que ser un divisor de 15. En total hay 3 opciones para n : 1, 3 y 13.

Solución 3. Veamos que no es posible. Los cuadros de las esquinas serán pares, cuando un tablero de 2×2 se coloque en las esquinas un número impar de veces. El número del cuadrado central se modifica con cualquier tablero de 2×2 . Luego si las esquinas se modifican para llegar a ser números pares, el central se modificará aumentando al numero 1 los cuatro números impares lo que dará al final un impar, no así un numero par como desearíamos.

Solución alternativa:

Inicialmente la suma de todos los números de la cuadrícula es 5, que es impar. Cada vez que se aplica la regla para modificar la cuadrícula, la suma aumenta en 4 y entonces el nuevo número es también impar. Una posición en que todos los números son pares tendrá una suma también par, luego no es posible llegar a la posición que se indica.

Solución 4. ¿Tomando en cuenta los \$100 que paga Drini, en cuanto puede cambiar el dinero que tiene Drini de un turno al siguiente? Si cae 1 o 2, gana \$3000; si cae 3 pierde \$300; si cae 4, ninguna ni pierde; y si caen 5 o 6 gana \$900. En cualquier caso gana o pierde un múltiplo de \$300 (si queda parejo, gana \$0, que también es múltiplo de \$300). Por lo tanto, la cantidad total de su ganancia (o pérdida) siempre es múltiplo de \$300 y entonces no puede ganar exactamente \$10000.

Solución 5. Considérese lo siguiente: O el centro de la circunferencia interior, Q el punto de tangencia entre las dos circunferencias, P el vértice del ángulo inscrito de 60° y A uno de los puntos de tangencia entre la circunferencia interior y el ángulo dado. Como PQ es bisectriz del ángulo dado, entonces $\angle QPA = 30^\circ$. Luego si r es el radio de la circunferencia interior se tiene que $AO = r$ y $2r = 2AO = PO$ (propiedad que cumplen los

triángulos con ángulos $30^\circ, 60^\circ$ y 90° aplicada al triángulo POA). Por lo tanto, $2 = PO + OQ = 2r + r = 3r$, de donde $r = 2/3$.

Solución Alternativa:

Considérese lo siguiente: O el centro de la circunferencia interior, Q el punto de tangencia entre las dos circunferencias, P el vértice del ángulo inscrito de 60° , A uno de los puntos de tangencia entre la circunferencia interior y el ángulo dado y B el punto de intersección de la recta PA con la circunferencia exterior. Como PQ es bisectriz del ángulo dado, entonces $\angle QPB = 30^\circ$ y como los triángulos BPQ y APO son rectángulos luego serán semejantes por el criterio AAA. Entonces si r es el radio de la circunferencia interior por semejanza se tiene que

$$\frac{1}{2} = \frac{BQ}{PQ} = \frac{AO}{PO} = \frac{r}{2-r}$$

de donde $2 - r = 2r$ y por tanto $r = 2/3$.

Solución 6. Si empezamos con un discípulo cualquiera y repetidamente nos brincamos n asientos a la derecha, pasaremos por todos los discípulos antes de regresar con el que empezamos (de hecho, si unimos cada discípulo con los que están separados de él por n asientos obtenemos una estrella de $2n + 1$ picos). Si no hay dos discípulos del mismo maestro separados por n asientos, pasamos alternadamente de un discípulo de merlín a uno de Fumanchú. Esto es imposible pues son un número impar de discípulos.

Solución 7. Si arreglamos los números en forma triangular

1				
2	4			
5	7	9		
10	12	14	16	
17	19	21	23	25
⋮				
1850	...	1936 = 44 ²		
1937	...	2023	2025 = 45 ²	
2026				

Vemos que el par más cercano a 2007 es el 2026.

Solución 8. Si maría quita las cuatro esferas de la cuarta columna gana, independientemente de lo que tire Elena. Veamos por que.

Si María quita las 4 esferas de la cuarta columna, Elena puede quitar 1, 2 o 3 esferas.

1. Si Elena quita las 3 de la tercera columna, María quita 2 de la segunda columna y Elena pierde.
2. Si Elena quita 2 esferas, pueden quedar 1, 2,1 esferas en cada columna o 1 en la primera y 3 en la tercera. En el primer caso, María quita una esfera de la segunda columna, Elena una de cualquier columna, María una y Elena pierde. En el segundo caso, María quita las 3 esferas y Elena pierde.
3. Si Elena quita 1 esfera, queda alguna de las siguientes configuraciones: 2,3; 1,1,3 ó 1,2,2. En el primer caso, María quita 1 esfera de la tercera columna y gana sea cual sea la jugada que haga Elena. En el segundo caso, si María quita 2 esferas de la tercera columna, Elena perderá. En el tercer caso, María quita la esfera que esta sola en una columna y sea la que sea la tirada que haga Elena (quitar 1 o 2 esferas) perderá en su siguiente turno.

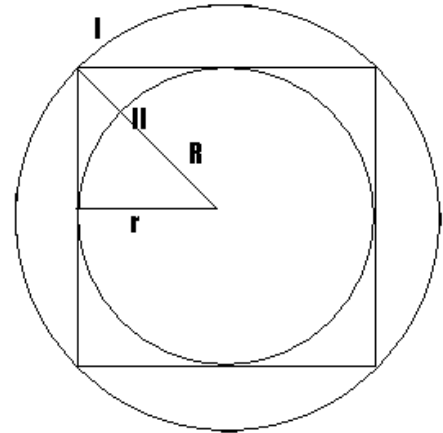
Solución 9. Queremos que el número sea múltiplo de 6, por tanto debe serlo de 2 y de 3. Al pedir que la suma de sus cifras sea 21 el número ya será múltiplo de 3. El número deberá además ser par, así es que pensemos en las posibilidades para su última cifra. El número no puede terminar en 0 ni en 2 porque no tenemos posibilidades para las primeras dos cifras de forma que la suma alcance 21. Si la última cifra es 4, las dos primeras deben sumar 17, así es que deben ser 8 y 9, y hay dos combinaciones posibles: 984 y 894. Si la última cifra es 6, las primeras pueden ser 8 y 7, o bien 9 y 6, con los que se pueden formar cuatro números: 876, 786, 966 y 696. Si la última cifra es 8, las posibilidades para las primeras son 6 y 7, 5 y 8, o bien 4 y 9; y hay 6 números: 768, 678, 588, 858, 498, 948. En total hay 12 números.

Solución 10. Supongamos que la mitad del lado del cuadrado mide r , entonces por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$R^2 = r^2 + r^2 \therefore R = \sqrt{2}r$$

Entonces:

$$\frac{\text{area}(\text{circulo I})}{\text{area}(\text{circulo II})} = \frac{\pi(\sqrt{2}r)^2}{\pi r^2} = \frac{2r^2}{r^2} = 2$$

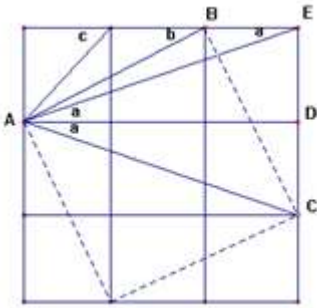


Solución 11. Observemos primero que si en un tablero de 2×2 se tienen ya elegidos 3 números, el cuarto número queda determinado si queremos que la suma sea par, es decir, si la suma de los tres números es impar ponemos un 1 y si es par ponemos un 0. Ahora, si de un tablero de 3×3 se tienen determinados el primer renglón y la primera columna, entonces quedan determinados los otros 4 lugares (determinándose sucesivamente a, b, c y d).

●	●	●
●	a	b
●	c	d

Además, no está determinado un tablero donde falte un número marcado con ●. Luego, hay tantos tableros con la propiedad, como las formas de elegir los números marcados con ●. Cada ● es 0 ó 1, por lo que hay $2^5 = 32$ tableros.

Solución 12. Realicemos los trazos auxiliares, como muestra la figura.



Y $\angle EAD = a$, por alternos internos.
 Triángulo AED = triángulo ACD
 Por lo tanto $\angle EAD = \angle CAD = a$
 Además $\angle BAD = b$
 $BAD + CAD = 45^\circ$
 $b + a = c$, ya que $c = 45^\circ$

Solución 13. Para que la suma sea máxima debemos tener una cadena en que cada ficha esté pegada por la menor cantidad de lados y que éstos tengan los menores números posibles. Así, la cadena debe tener 2002 fichas con dos lados compartidos y 2 fichas (las de los extremos) con un lado compartido. Si se comparten los dos números más pequeños (el 1 y el 2) la primera y segunda ficha deberían estar pegadas por el 1, y la segunda y tercera fichas deberán estar pegadas por el 2; pero es imposible porque la primera y la tercera ficha estarían pegadas, compartiendo la primera el lado 3 y la tercera el lado 6 y se rompen las reglas del dominó. De modo que los lados que se deben compartir son los que tienen los números 1 y 3. De ese modo, las 2002 fichas de en medio contribuyen con 17 cada una a la suma final, y las de los extremos con 20. Así, la suma final es $(2002 \times 17) + (2 \times 20) = 34\ 074$.

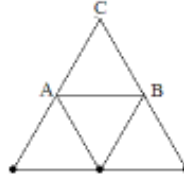
Solución 14. Observemos que los triángulos PQA y SQB son semejantes en la razón 1:2 pues $PQ = \frac{1}{2} QS$. De la misma manera, los triángulos RCS y RAP son semejantes también en la razón 1:2. Así, tenemos que $BS/AP = 2$ y $CS/AP = \frac{1}{2}$. Como $BS = BC + CS = 3 + CS$, entonces $CS/AP + 3/AP = 2$ y como $CS/AP = \frac{1}{2}$, resulta que $AP=2$ y $CS = 1$.

Solución 15. Claramente 10 es suertudo, y como $1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, tenemos que 13 y 31 también lo son. Sucede que $3^2 + 2^2 = 13$, por lo que 32 es suertudo. Entonces, 31 y 32 son dos suertudos consecutivos y por lo tanto para cualquier $N \geq 1$,

$$\underbrace{111\dots1000\dots0}_{31 \text{ unos } \quad N \text{ ceros}} \quad \text{y} \quad \underbrace{111\dots1000\dots01}_{31 \text{ unos } \quad N-1 \text{ ceros}}$$

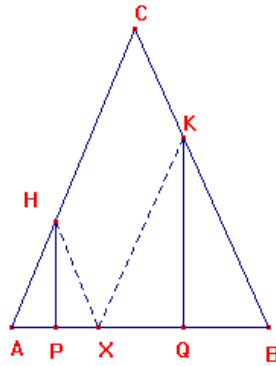
son dos enteros suertudos consecutivos.

Solución 16. Digamos que tenemos los colores blanco y negro, tenemos dos posibilidades la de encontrar un triángulo cuyos vértices son del mismo color, con lo cual ya termine, o de que dos vértices sean de un mismo color. Supongamos que los dos vértices son negros, entonces si se tiene tres puntos colineales a una misma distancia entre los 3, entonces podemos decir que ya acabe, ya que hacemos la siguiente figura:



Si los tres puntos de la base son de color negro entonces el punto A puede ser de color negro, si es así ya encontré el triángulo que buscaba y análogamente sucede lo mismo con el punto B. Como el vértice C es blanco, ya que mencionamos que el triángulo escogido tiene sólo dos vértices de color negro, que son los de la base, en caso de que A y B no sean negros sino blancos, entonces ya tenemos el equilátero que es el triángulo ABC. Entonces para obtener los tres puntos colineales, me fijo en dos puntos de un color y me fijo en el tercero que formaría los tres colineales, como quiero que no existan tres puntos colineales, entonces es del color opuesto, y análogamente el del lado opuesto. Entonces el que está en el centro de los 2 no puede ser al mismo tiempo blanco y negro.

Solución 17. Consideremos los segmentos HX y XK. Tenemos por criterio LAL que $\triangle HAP \cong \triangle HXP$. y del mismo modo que $\triangle KXQ \cong \triangle KBQ$. Como consecuencia se tiene que $\triangle AHX$ y el $\triangle XKB$ son isósceles. De aquí que ángulo $\angle HAX \cong \angle HXA$ y que $\angle KXB \cong \angle KBX$. Así,
 $\angle AHX = 180^\circ - \angle HAX - \angle HXA = 180^\circ - \angle HAX - \angle KXB = \angle HXK$. De aquí concluimos que AC es paralela a XK. Del mismo modo se tiene que $\angle BKX = \angle HXK$ y por lo tanto CB es paralela a HX. De todo lo anterior se obtiene que HXKC es un paralelogramo y usando la definición de paralelogramo $CK = HX = AH$.
 Como $CA = CB$ entonces $AH + HC = CK + KB$, donde usando el resultado anterior $HC = KB$.



Solución 18. Escribamos $3n + 1 = k^2$. k no puede ser un múltiplo de 3, pues si lo fuera, entonces, 1 sería la diferencia de dos múltiplos de 3: $k^2 - 3n$, así que 1 también sería divisible entre 3, lo cual es falso. Entonces tenemos dos posibilidades para k : que deje residuo 1 al dividirlo entre 3 o que deje residuo 2.

En el primer caso $k = 3a + 1$, con a entero, así que:
 $3n + 1 = k^2 = 9a^2 + 6a + 1$,

$$3n = 9a^2 + 6a,$$

$$n = 3a^2 + 2a,$$

$$n + 1 = a^2 + a^2 + a^2 + 2a + 1,$$

$$n + 1 = a^2 + a^2 + (a + 1)^2$$

En el segundo caso $k = 3b + 2$, para algún entero b , así que:

$$3n + 1 = k^2 = 9a^2 + 12a + 4,$$

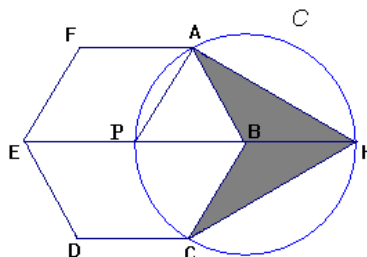
$$3n = 9a^2 + 12a + 3,$$

$$n = 3a^2 + 4a + 1,$$

$$n + 1 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 2a + 1,$$

$$n + 1 = a^2 + (a + 1)^2 + (a + 1)^2.$$

Solución 19. Llamemos P al centro del hexágono. Como PB y BH, son iguales por ser radios del círculo; tenemos que las áreas de los triángulos ABH, BCH y BAP son iguales entre sí e iguales a 1/6 del área del hexágono ABCDEF. Así, el área sombreada es igual a 1/3.

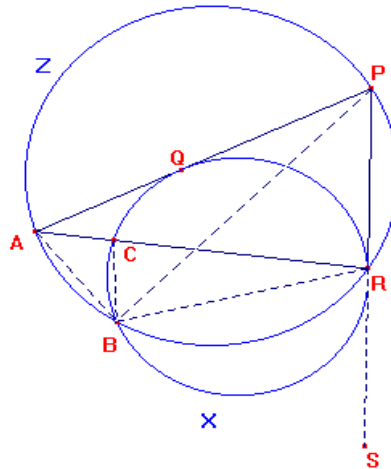


Solución 20. Observemos a los once números como un conjunto. La suma de los once números es 11, y las posibles operaciones serán, o sumar 2, restar dos o sumar 0. Como la suma de un número impar más uno par siempre resulta en un número impar, y queremos llegar a 110, nos damos cuenta que esto no es posible.

Solución 21. Tenemos que el $\angle BCR = \angle ABC + \angle BAC$, de aquí que el $\angle ABC = \angle BCR - \angle BAC$. Veamos que el $\angle BRS$ es semi-inscrito y el $\angle BCR$ es inscrito, además, ambos subtienen el mismo arco, de aquí que $\angle BRS = \angle BCR$. Por lo tanto, $\angle ABC = \angle BRS - \angle BAC = 180^\circ - \angle BRP - \angle BAR = 180^\circ - \angle BRP - \angle BPR$ ya que $\angle BAR$ y $\angle BPR$ son inscritos y subtienen el mismo arco.

Por suma de ángulos interno del $\triangle BPR$ se tiene que:

$\angle ABC = 180^\circ - \angle BRP - \angle BPR = \angle PBR = \angle PAR$ ya que ambos son inscritos y subtienen el mismo arco.



Solución 22. Los posibles residuos que se obtienen de dividir un número entre 7 son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Entre los números del 1 al 50 tenemos que:

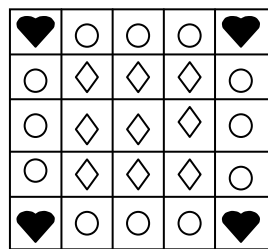
- 8 números tienen residuo 1
- 7 números tienen residuo 2
- 7 números tienen residuo 3
- 7 números tienen residuo 4
- 7 números tienen residuo 5
- 7 números tienen residuo 6
- 7 números tienen residuo 0

Para que S cumpla con la condición de no tener un par de elementos que tenga una suma divisible entre 7, se debe cuidar que:

- Si hay un número de residuo 1 no puede haber uno con residuo 6
- Si hay un número de residuo 2 no puede haber uno con residuo 5
- Si hay un número de residuo 3 no puede haber uno con residuo 4
- No pueden haber dos números con residuo 0

Respetando cada uno de los principios que hemos establecido construimos S con los elementos de residuo 1, elementos de residuo 2 y residuo 3 (o pudiera ser con residuo 4 y 5), y un elemento de residuo 0. Tenemos entonces $8 + 7 + 7 + 1 = 23$.

Solución 23. No es posible. Cuadrados de 2×2 dentro de un tablero de 5×5 , hay 16. Suponemos que la suma de los números de cada cuadrado de 2×2 es menor o igual a 40, luego tenemos que las 16 sumas son menores de $16 \times 40 = 640$. Por lo tanto, como se muestra en la figura, al hacer la suma de las 16 sumas, tenemos que los cuadrados que cuentan con ♥ se cuentan una vez, los que tienen ○ dos veces y los que tienen ◇ se cuentan cuatro veces



Luego, lo más conveniente sería colocar los números más grandes en los cuadrados que menos se utilizan, y los más pequeños en ◇.

De aquí que la suma de las 16 sumas sea:

$$(25 + 24 + 23 + 22) + 2(21 + \dots + 10) + 4(9 + \dots + 1) = 646. \text{ Por lo tanto, deberá haber un cuadrado de } 2 \times 2 \text{ cuyos elementos sumen más de } 40.$$

Solución 24. Como el triángulo ADE es rectángulo, AE es el diámetro de su circunferencia circunscrita, de modo que C es el centro de dicha circunferencia. Por lo tanto $CA = CD$ y el triángulo DCA es isósceles. Por otra parte, como $OA = OC$, el triángulo AOC también es isósceles. Como ambos triángulos isósceles comparten el ángulo en A, son semejantes y por lo tanto $AD/AC = AC / AO$, o, $AO \cdot AD = AC^2$.

