

# Unas cuantas palabras acerca de las Demostraciones

## ¿Qué es una demostración?

Una demostración no es más que un argumento lógico bien fundamentado. No hay una forma especial para que una demostración se vea en una página (no te preocupes acerca del formato “en dos columnas” que los maestros de geometría te enseñan). Tan pronto como establezcas precisamente qué estás intentando demostrar, y entonces hagas tus casos coherentes y lógicos, entonces contará como una demostración.

¿Cómo puedes decir si un argumento es lo suficientemente bueno para ser una demostración? Imagina que tu molesta (pero inteligente) hermanita está mirando detrás de ti, siempre criticándote: “¿Y por qué es esto? ¿Y cómo sabes eso?” Siempre que digas que algo es obvio, ella preguntará, “¿Pero cómo?” Siempre que seas algo impreciso, ella dirá, “No entiendo, qué quieres decir con eso” Si tu argumento pasa el test de la molesta hermanita, ¡entonces es una demostración!

## Dificultades de las Demostraciones

- *El afirmar una “obviedad”*. Sé precavido cuando digas que algo es “obvio”. Esta palabra suena como una campana de advertencia cuando la mente la lee, porque muy frecuentemente la gente la usa para ocultar su ignorancia. Si por “obviedad” tú entiendes “mi intuición me dice que eso es cierto, pero no puedo explicar por qué”, entonces piensa otra vez: ¡eso no es lo suficientemente bueno!

Por otra parte, si algo es “obvio” porque su justificación es clara en tu mente y piensas que el lector puede fácilmente ver los detalles, entonces puedes dejarlo sin más explicaciones. Claro, que cada vez que tú hagas esto, estás tomando un riesgo; el lector puede no pensar que eso es fácil, y pensar que tú simplemente no sabes cómo justificar lo que afirmas. Por eso, en caso de duda, ¡explica siempre!

- *Razonar al revés*. Muy frecuente en una prueba, los estudiantes escribirán sobre lo que están intentando demostrar, obteniendo un enunciado verdadero de ello, ¡y pensando que ya terminaron! (Esto pasa frecuentemente cuando la afirmación a ser demostrada es una ecuación o desigualdad, tal que el tamaño de la prueba es una serie de manipulaciones algebraicas.) Tal razonamiento *no* constituye una prueba, aunque usualmente no es muy difícil convertirlo en una: sólo comienza con el

enunciado que terminaste, y muestra que el resultado deseado puede ser derivado *de él*.

- *Perder la secuencia de un argumento.* Siempre recuerda dónde está basada tu demostración, y di sólo lo que necesitas en ella. Alguna gente intenta escribir tantos hechos ciertos como pueden, con la esperanza de que al menos uno de ellos será pertinente. Esto no solo hace la demostración difícil de seguir, sino que le dice al lector que realmente no sabes qué estás haciendo. Brevidad y claridad, en una prueba, ¡es la clave!

Si la estructura lógica de tu argumento es muy complicada, puede ayudarte dividirla en pasos intermedios. Por ejemplo, primero puedes establecer y probar un resultado auxiliar (usualmente llamado *lema*), y usar esto para probar tu principal afirmación. Siempre algo tan simple como escribir los pasos en tu argumentos y ponerlos en párrafos separados puede ayudar a que tu demostración sea mucho más fácil de seguir. Sé libre de introducir una nueva notación y símbolos a placer, si contribuye a la claridad de tu explicación.

- *No considerar todos los casos.* Debes estar seguro que pones atención a todas las posibilidades en un problema, no sólo las más obvias. Si estás dividiendo por un número, ¿chegaste que no sea 0? Si sólo resolviste una ecuación cuadrática, ¿recordaste considerar ambas soluciones? Si el problema te dice sobre probar algo para todos los enteros, ¿consideraste tanto los negativos como los positivos?
- *Ejemplos contra Pruebas.* Tú has dicho probablemente muchas veces que un ejemplo no es una prueba, pero esto no es correcto completamente. Por supuesto, si tú quieres probar que algo es cierto *en general*, debes mostrar un argumento general: un número de ejemplos no será suficiente. Por otro lado, si quieres probar que algo *no siempre* es verdadero, los argumentos generales, acerca de por qué no es siempre verdadero son completamente inútiles: en este caso, la *única* prueba correcta es un simple, concreto contraejemplo.

Otro uso válido de los ejemplos es ilustrar un argumento complicado o definición. Esto es completamente opcional, y no es sustituto para una clara explicación; pero por tan grandes como sean es claro que los ejemplos no son *parte* actual de tu argumento, está a tu disposición ponerlos para clarificar.

## Revisando tu Trabajo

Supón que has escrito tu demostración, y revisado cuidadosamente que no has tenido ninguna de las dificultades mencionadas anteriormente. Todo parece claro y lógico, y ahora tu molesta hermanita está satisfecha. ¿Ahora qué?

Cuando la respuesta a un problema es un número, usualmente es fácil checar si tu solución es correcta: solo usa el número, y ve si todo trabaja. ¿Pero cómo verificas si una *demostración* es correcta?

Primero asegúrate que lo que estás probando realmente es cierto: ¡una demostración de un enunciado falso posiblemente puede no ser cierta! Busca contraejemplos para tu argumento. Si encuentras uno, úsalo en tu demostración y ve dónde salen mal las cosas. Algunas veces, es fácil corregir el problema: por ejemplo, puede ser que solo necesites especificar que tu argumento funciona solo para enteros positivos, el cual es el único caso que tomaste en cuenta. Pero otras veces, necesitas encontrar una seria deficiencia en tu razonamiento. Pon atención a exactamente cuál fue el error con el contraejemplo – puede darte una idea de cómo solucionar el problema.

¿Y qué si estás seguro que el enunciado que estás probando es cierto – por ejemplo, si el problema específicamente te pide probarlo? En este caso, relea el enunciado del problema cuidadosamente. ¿Tu demostración usa *toda* la información que se te dió? Si no, es probable que en algún lado estés olvidando un paso. Por ejemplo, supón que el problema es:

*Demuestra que para cada número primo  $p > 3$ ,  $p^2 - 1$  es divisible por 24.*

y te das cuenta que en tu solución nunca usaste la suposición que  $p > 3$ . Entonces tu demostración debería, en teoría, ¡trabajar bien para  $p = 2$ ! Pero  $2^2 - 1 = 3$  no es divisible entre 24, y ahora sabes que debes tener un error en algún lado. Regresa por tu demostración, sustituye 2 por  $p$  donde sea. En algún punto, obtendrás un paso que suena ridículo; eso es lo que necesitas corregir.

(Cada año, el Departamento de Matemáticas en la Universidad de Harvard, recibe docenas de cartas en las cuales la gente argumenta una elemental prueba del celebrado Último Teorema de Fermat:  $x^n + y^n = z^n$  no tiene soluciones enteras para  $n > 2$ . Pero muchas de esas “pruebas” nunca hacen uso de la suposición que  $n > 2$ . No hay necesidad de ver exactamente el lugar donde dicho argumento falla: sabes que no puede ser correcto, si  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .)

## Comentarios Adicionales

- Teoremas potencialmente complicados que ayuden en la demostración pueden ser usados, con referencias apropiadas. También está bien usar material avanzado si éste deja una simple solución de un problema basada en términos elementales. De cualquier forma, si el problema te pide que un teorema común sea demostrado o sigue inmediatamente de un resultado

conocido, entonces el teorema debe ser probado, no solo mencionado. ¡No hagas trivial el problema!

- Algunas veces, un problema puede ser resuelto por una larga y exhaustiva búsqueda de cálculos. Dichas soluciones generalmente no reciben todo el crédito si vencen el fin matemático del problema.

## Unos cuantos ejemplos de Demostraciones y no-Demostraciones

**El Problema:** Tienes dos cajas,  $A$  y  $B$ . La caja  $A$  contiene 100 canicas blancas, y la caja  $B$  contiene 100 canicas negras. Primero sacas 10 canicas blancas de la caja  $A$  y las colocas en la caja  $B$ . Luego sacas 10 canicas de la caja  $B$  y las metes en la caja  $A$ . ¿Cuál es ahora mayor: el número de canicas negras en la caja  $A$  o el número de canicas blancas en la caja  $B$ ?

**Solución 1:** Los dos números son iguales.

- *Comentarios:* Esta es la respuesta correcta, pero como la explicación no está dada, ¡la solución recibirá solo una puntuación parcial!

**Solución 2:** Los dos números son iguales. Siempre aunque no todas las canicas que movamos de  $B$  a  $A$  puedan ser negras, si no son todas negras entonces estaremos moviendo algunas canicas blancas de regreso a  $A$ . Entonces ambas cajas terminarán con menos de 10 canicas del color “erróneo” en ellas, y tendrán el mismo número de canicas “erróneas”.

- *Comentarios:* Esta es la idea general correcta, pero demasiado vaga para una demostración. En particular, el enunciado final no sigue lógicamente de algo con lo que se comenzó.

**Solución 3:** Los dos números son iguales. Siempre aunque no todas las canicas que movamos de  $B$  a  $A$  puedan ser negras, si no son todas negras entonces estaremos moviendo algunas canicas blancas de regreso a  $A$ . Entonces ambas cajas terminarán con menos de 10 canicas del color “erróneo” en ellas. Por ejemplo, si de las 10 canicas que movemos de  $B$  a  $A$ , 3 son blancas y 7 negras, entonces  $A$  terminará con 7 canicas negras, y  $B$  tendrá  $10 - 3 = 7$  canicas blancas. De esta forma  $A$  y  $B$  tendrán el mismo número de canicas del color “erróneo”.

- *Comentarios:* Esta es mejor: se basa en un ejemplo para clarificar la vaga idea, y tiene éxito en llevar la intuición de que los números realmente serán iguales. Como siempre, un ejemplo no es suficiente: un argumento general está haciendo falta.

**Solución 4:** Después que hemos movido las 10 canicas blancas de  $A$  a  $B$ , la fracción de canicas blancas en  $B$  es  $1/11$ , la cual es cercana a  $1/10$ . Entonces suponemos que aproximadamente una de las 10 canicas que movimos de  $A$  a  $B$  será blanca. De esta forma, al final,  $B$  termina con 9 canicas blancas y  $A$  obtiene 9 canicas negras.

Entonces la respuesta es: los números son iguales.

- *Comentarios:* Esta solución lleva a una consideración irrelevante – probabilidad. A menos que se indique, un problema pregunta siempre no por la más probable de todas las posibles soluciones. Más aún, esta solución asume que entre las dos transferencias de las 10 canicas, las canicas en la caja  $B$  fueron mezcladas – ¡lo cual no está indicado en ninguna parte en el enunciado del problema!

**Solución 5:** Si el grupo de 10 canicas que movimos de  $B$  a  $A$  contenía  $k$  negras y  $10 - k$  blancas, entonces  $A$ , al final, tiene  $k$  canicas negras, y  $B$  tiene  $10 - (10 - k) = k$  canicas blancas. De esta forma los números son iguales.

- *Comentarios:* ¡Una demostración válida! Observa que es más corta que cualquiera de las otras soluciones (excepto la 1). Un argumento no necesita ser extenso para hacerlo válido – sólo necesita ser lógico y completo.