

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Delegación Yucatán

Teoría de Números

06/09/08

Problema 1. Demuestre que si dos fracciones son irreducibles (simplificadas) y su suma es un entero, entonces ambas fracciones tienen el mismo denominador.

Problema 2. Demuestre que para cualquier entero positivo n , el número

$$(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$$

es múltiplo de 3804.

Problema 3. Demuestre que si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 2n}$$

es una fracción irreducible (simplificada).

Problema 4. Si a y b son enteros positivos, pruebe que 19 divide a $11a + 2b$ si y sólo si 19 divide a $18a + 5b$.

Problema 5. Si a y b son enteros positivos primos relativos y n es un entero, pruebe que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a $n + 2$.

Problema 6. Encuentre dos números enteros a y b tales que: b^2 sea múltiplo de a , a^3 sea múltiplo de b^2 , b^4 sea múltiplo de a^3 , a^5 sea múltiplo de b^4 , pero b^6 no sea múltiplo de a^5 .

Problema 7. Pruebe que no existe un número entero positivo de 1989 cifras que tenga al menos tres de ellas iguales a 5 y tal que la suma de todas las cifras sea igual al producto de las mismas.

Problema 8. Sea

$$f(x) = \sqrt{24x + 1}$$

con x natural, probar que para todo primo $p \geq 5$ existe un natural x_0 tal que $f(x_0) = p$.

Problema 9. Encuentra todas las tercias (p_1, p_2, p_3) tales que:

- p_1, p_2 y p_3 son primos.
- $p_2 - p_1 = 2$ y $p_3 - p_2 = 2$.

Problema 10. Sea p_k el k -ésimo número primo. Prueba que

$$\prod_{i=1}^n p_i + 1$$

no es un cuadrado perfecto para todo n natural.