

Geometría.

Pedro Sánchez

24 de noviembre de 2002

Índice general

1. Resultados iniciales.	3
1.1. Ángulos.	3
1.2. Congruencia y semejanza.	5
1.2.1. Congruencia.	6
1.2.2. Semejanza	9
1.3. El círculo.	14
1.4. Algunos lugares geométricos.	19
1.5. Problemas.	23
2. Elementos importantes del triángulo.	25
2.1. El centroide.	25
2.2. El circuncentro.	28
2.3. El incentro y los excentros.	29
2.4. El ortocentro.	31
2.5. Problemas	32
3. Soluciones	33

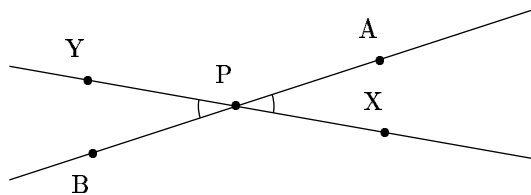
Capítulo 1

Resultados iniciales.

Este capítulo será mayormente una presentación de teoremas y resultados sin mayor demostración, que consistirán la base sobre la cual construiremos las pruebas de resultados posteriores. Gran parte de estos teoremas se estudian en los programas de estudio de secundaria y bachillerato.

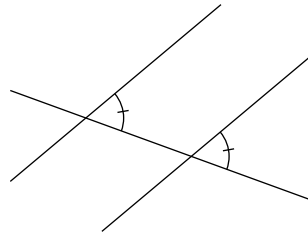
1.1. Ángulos.

Si dos líneas se cortan, los ángulos que quedan opuestos por el vértice son iguales, ya que ambos, sumados cualquiera de los ángulos adyacentes forman un ángulo de 180° .

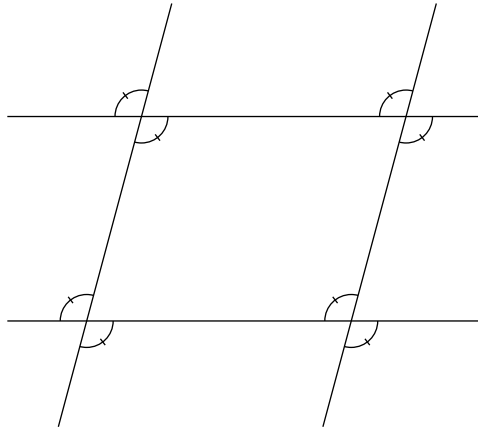


$$\begin{aligned}\angle XPA &= \angle YPB \\ \angle XPA + \angle APY &= 180^\circ, & \angle YPB + \angle APY &= 180^\circ\end{aligned}$$

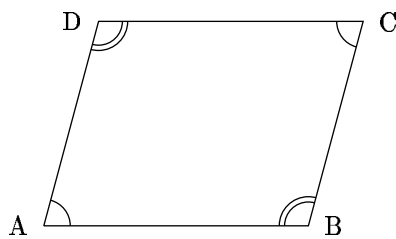
Otro resultado básico establece que si una recta corta a dos líneas paralelas, los ángulos correspondientes son iguales.



Combinando los dos resultados precedentes, obtenemos que en la siguiente figura en que se cortan dos pares de líneas paralelas, los ángulos marcados del mismo modo son iguales.

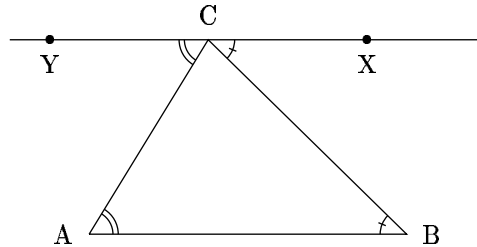


La figura anterior nos proporciona otro resultado importante: **En un paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales y los adyacentes suman 180° .**



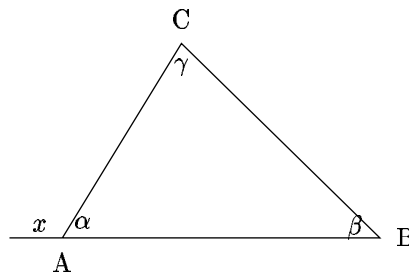
$$\angle A = \angle C, \quad \angle A + \angle B = 180^\circ.$$

Otra consecuencia directa de las igualdades de ángulos entre paralelas es que **en cualquier triángulo los ángulos internos suman 180° .**



Si trazamos una paralela por C al lado AB en el triángulo $\triangle ABC$, tenemos que $\angle BAC = \angle BCX$ y $\angle CBA = \angle YCA$. Pero $\angle YCA + \angle ACB + \angle BCX = 180^\circ$ por lo que $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$.

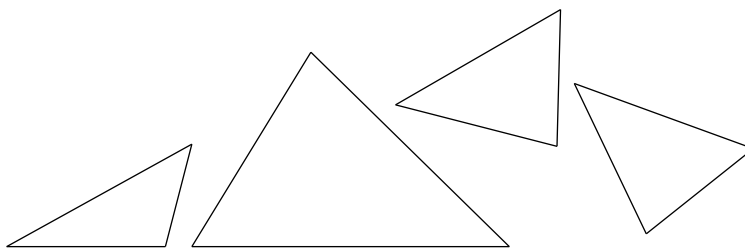
Ahora, consideremos por un momento los ángulos externos.



El ángulo externo x , sumado a α es igual a 180° . Por otro lado, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Esto quiere decir que $x = \beta + \gamma$. En otras palabras: **En un triángulo, cada ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes.**

1.2. Congruencia y semejanza.

A grandes rasgos podemos decir que dos figuras son *congruentes* si tienen la misma forma y el mismo tamaño, mientras que dos figuras son semejantes son *semejantes* si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Haremos que estos conceptos sean más precisos dentro de un momento.

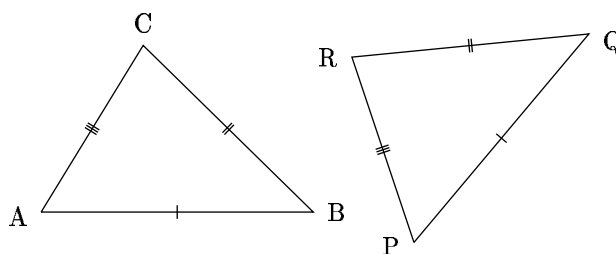


En la figura anterior, los tres triángulos a la derecha son semejantes entre sí, pero sólo los dos pequeños a la derecha son congruentes entre sí.

1.2.1. Congruencia.

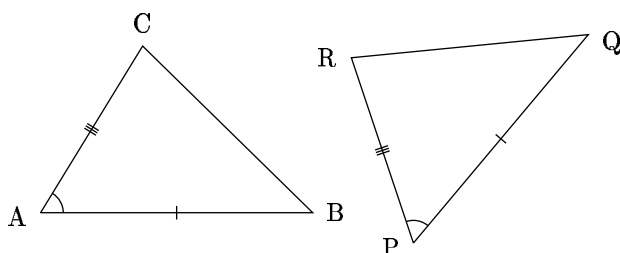
Para que dos triángulos sean congruentes, sus lados correspondientes deben ser iguales, lo mismo que sus ángulos. Sin embargo, usualmente no es necesario comprobar las 6 igualdades para establecer que dos triángulos son congruentes, sino que basta con verificar alguno de los siguientes criterios.

LLL Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son iguales.



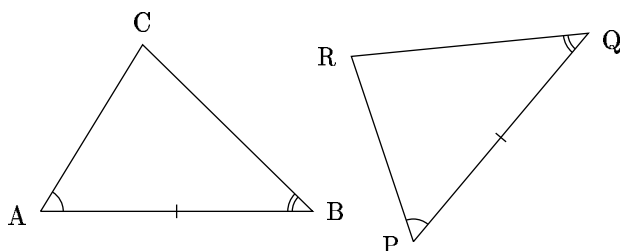
En la figura, cada par de lados correspondientes es igual, por lo que los triángulos son congruentes.

LAL Dos triángulos son congruentes, si dos pares de lados correspondientes son iguales, lo mismo que el ángulo entre ellos.



Como $AB = PQ$, $AC = PR$ y $\angle BAC = \angle QPR$, los triángulos son congruentes.

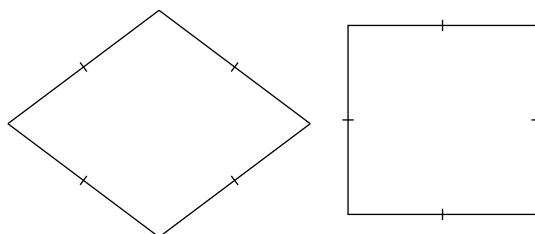
ALA Dos triángulos son congruentes, si tienen un par de lados correspondientes igual, lo mismo que los dos pares de ángulos que lo comprenden.



Aquí tenemos que $AB = PQ$, $\angle BAC = \angle QPR$ y $\angle CBA = \angle RQP$, suficiente para asegurar que los triángulos son congruentes.

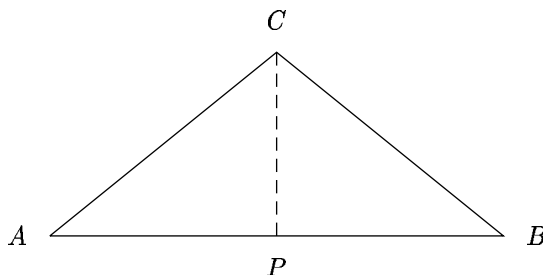
La congruencia de triángulos se denota con el símbolo \cong y se acostumbra a enumerar los vértices correspondientes en el mismo orden. Así, podríamos escribir $\triangle BAC \cong \triangle QPR$ o $\triangle ABC \cong \triangle PQR$. En general, cuando en algún problema geométrico complejo se requiera probar que dos segmentos son iguales, en un gran número de casos, el problema se traduce en probar la congruencia de dos triángulos y verificar que los segmentos pedidos son lados correspondientes de esos triángulos.

Cabe también recordar que estos criterios son útiles únicamente en el caso de los triángulos. Por ejemplo, es posible que dos polígonos tengan todos sus lados correspondientes iguales y aún así no sean congruentes. Este es el caso de un cuadrado y un rombo cuyos lados tienen la misma longitud.



En general, para verificar que dos polígonos son congruentes, es necesario comprobar que todos sus lados y todos sus ángulos correspondientes son iguales. Una excepción la constituyen los polígonos regulares. Si se tienen dos polígonos regulares con el mismo número de lados, sólo necesitamos comprobar que el lado del primer polígono es igual al del segundo para concluir que son polígonos congruentes.

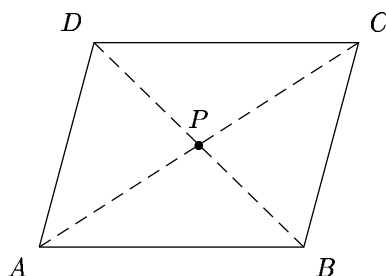
Un resultado muy conocido nos dice que **en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales miden lo mismo**. Para verificarlo, tomemos un triángulo isósceles ABC en el que $AC = BC$. Queremos probar que $\angle BAC = \angle ABC$. Sea P el punto medio de BC , y fijémonos en los triángulos APC y BPC



Por un lado, $CA = CB$ pues el triángulo es isósceles. Además, $AP = PB$ pues P es el punto medio, y $CA = CA$. El criterio LLL nos dice que $\triangle APC \cong \triangle BPC$ y por tanto los ángulos correspondientes $\angle BAC$ y $\angle ABC$ son iguales. Esto concluye la prueba.

Podemos deducir otro resultado importante. Sea $ABCD$ un paralelogramo, y tracemos la diagonal AC . Los ángulos $\angle DAC$ y $\angle ACB$ son iguales por ser ángulos alternos internos entre paralelas (los lados son paralelos), al igual que $\angle DCA = \angle CAB$. Por el criterio ALA los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle CAB$ son congruentes: **La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes**. Una consecuencia directa es que

$DA = CB$ y $AB = CD$: **Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.**



Si trazamos la otra diagonal y llamamos P al punto de corte de ambas diagonales, podremos usar el criterio ALA de nuevo para probar que $\triangle APB \cong \triangle CPD$ de modo que $AP = PC$ y $BP = PD$. Es decir, **las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.**

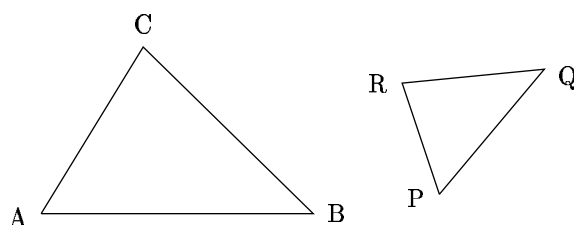
1.2.2. Semejanza

El concepto de semejanza es uno de los más fundamentales en el estudio de la geometría. Corresponde a lo que comúnmente llamamos “figuras a escala”, esto es, si tenemos una figura geométrica y dibujamos otra que sea 3 veces más grande, decimos que las dos figuras son semejantes y que están en proporción $1 : 3$, o que el primero está en razón $1/3$ al segundo.

Prácticamente la totalidad de los problemas que involucran semejanza son acerca de semejanza de triángulos. Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ son semejantes, escribimos $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, procurando nombrar los vértices correspondientes en el mismo orden. Cuando dos figuras geométricas son semejantes es porque tienen la misma forma y por tanto los mismos ángulos. Sin embargo, el converso no necesariamente es cierto, ya que, por ejemplo, un cuadrado y un rectángulo tienen sus ángulos correspondientes iguales y sin embargo no son semejantes. Del mismo modo, dos figuras semejantes tienen sus lados correspondientes en la misma proporción. Nuevamente el converso no es cierto (considere un rectángulo y un paralelogramo arbitrario cuyos lados correspondientes sean iguales), por lo que para asegurar que dos figuras son semejantes hay que verificar que todos sus ángulos correspondientes son iguales,

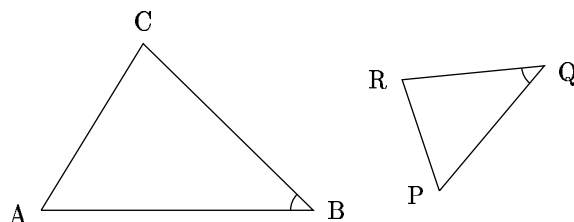
así como verificar que todos los pares de lados correspondientes están en la misma proporción. Al igual que la congruencia, en el caso especial en que las dos figuras son triángulos se dispone de una serie de criterios que permiten establecer la semejanza de modo más rápido.

LLL Si dos triángulos tienen sus pares de lados correspondientes en la misma proporción entonces son semejantes.



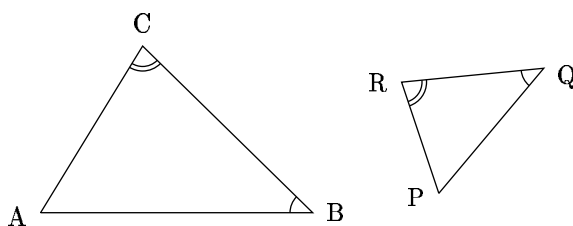
Como $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$, se cumple que $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

LAL Si dos pares de lados correspondientes están en la misma razón, y el ángulo entre ellos es igual, entonces los triángulos son semejantes.



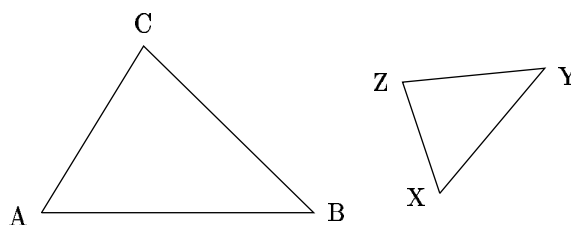
Si se tiene que $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ y $\angle ABC = \angle PQR$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

AA Si los triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes.



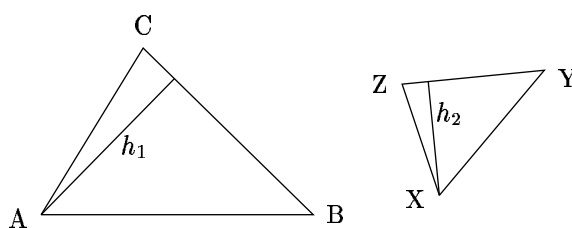
Como $\angle ABC = \angle PQR$ y $\angle ACB = \angle PRQ$, sabemos que $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

En general, el tercer criterio es el preferido para determinar la semejanza de dos triángulos. Hacemos notar que los criterios se cumplen en ambas direcciones, es decir, si el triángulo $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle XYZ$ entonces necesariamente los ángulos son iguales y los lados son proporcionales.



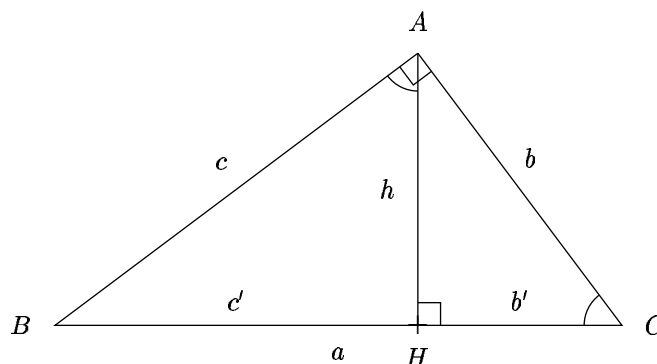
$$\triangle ABC \sim \triangle XYZ \Rightarrow \frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$$

Sin embargo, la verdadera utilidad del concepto de semejanza queda oculta en el estudio usual de la geometría, ya que se hace énfasis únicamente en las proporciones entre los lados, cuando en realidad, **si dos triángulos son semejantes, todos sus elementos correspondientes (lados, alturas, medianas, radios, etc.) son también proporcionales**. Así, la siguiente figura muestra dos triángulos semejantes en razón k (es decir $AB/XY = k$) e ilustra que sus alturas están en la misma proporción ($h_1/h_2 = k$).



$$\triangle ABC \sim \triangle XYZ \Rightarrow \frac{AB}{XY} = \frac{h_1}{h_2}$$

Ahora analizaremos una situación importante que se usa con mucha frecuencia. Sea ABC un triángulo rectángulo (con $\angle BAC = 90^\circ$) y tracemos la altura AH . Usaremos letras minúsculas para referirnos a las longitudes de los segmentos ($a = b' + c'$).



Notemos que $\angle HCA + \angle CAH = 90^\circ$ puesto que el tercer ángulo del $\triangle AHC$ es recto y los tres ángulos deben sumar 180° . Por otro lado, $\angle CAH + \angle HAB = 90^\circ$, lo que implica $\angle HCA = \angle HAB$. Un argumento similar nos muestra que $\angle ABH = \angle CAH$. Por el criterio AA, tenemos las siguientes semejanzas de triángulos: $\triangle ABC \sim \triangle HBA \sim \triangle HAC$. Esto es, **la altura de un triángulo rectángulo levantada sobre la hipotenusa, lo divide en dos triángulos semejantes al original.**

La semejanza de triángulos implica las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{h}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{h} = \frac{h}{c'}$$

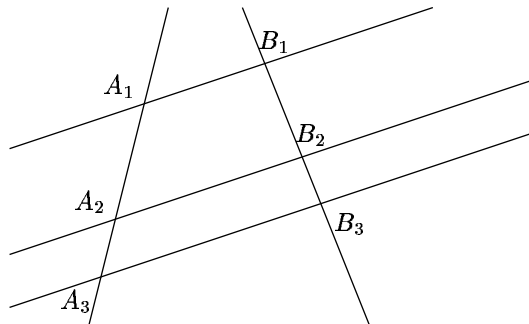
las cuales se resumen en tres simples relaciones:

$$\begin{aligned} b^2 &= ab' \\ c^2 &= ac' \\ h^2 &= ab \end{aligned}$$

La última de estas tres relaciones se obtuvo de la razón $b'/h = h/c'$ y usualmente se expresa de la siguiente manera: **la altura de un triángulo rectángulo levantada sobre la hipotenusa, es la media geométrica de los segmentos en que divide a la hipotenusa.**

Finalmente, notemos que $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a^2$. La relación $a^2 = b^2 + c^2$ se conoce como el Teorema de Pitágoras y se expresa como **“En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual al cuadrado de los catetos”**.

Otro caso importante ocurre cuando dos triángulos tienen sus lados paralelos. En este caso, los ángulos correspondientes son automáticamente iguales y por tanto los triángulos son semejantes. Un teorema estrechamente relacionado con este último hecho es el Teorema de Tales: **Si dos rectas cortan un haz de rectas paralelas, los segmentos que determinan son proporcionales.**

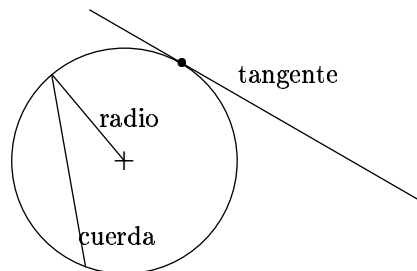


$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$$

Para ver la relación entre este teorema y el anterior, se prolongan las rectas hasta que se corten, y se obtienen triángulos cuyos lados son paralelos (de hecho dos pares coinciden), de donde se obtienen semejanzas que son equivalentes al Teorema de Tales. (Cuando el par de rectas también es paralelo, las rectas no se cortan, pero $A_1A_2 = B_1B_2$ y $A_2A_3 = B_2B_3$ por lo que las fracciones de arriba son ambas iguales a 1).

1.3. El círculo.

Los teoremas principales sobre un círculo se relacionan con medidas de ángulos en diversas posiciones. Antes de enunciarlos, recordemos los elementos importantes de un círculo. El borde de un círculo se denomina *circunferencia*, aunque usualmente al referirnos a ésta decimos también círculo. En general, el contexto determina fácilmente a qué nos referimos. El *centro* del círculo es el punto del cual equidistan los puntos de la circunferencia. A cada uno de los segmentos que unen el centro con algún punto de la circunferencia le llamamos *radio*, aunque también usamos esta palabra para referirnos a su longitud en vez de a un segmento en particular. Un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*, y a la línea que la contiene le llamamos *secante*. Las cuerdas de mayor longitud son las que unen dos puntos opuestos del círculo y pasan por el centro. A cada una de estas cuerdas, así como a su longitud, le llamamos *diámetro*. En particular, refiriéndonos a longitudes, un diámetro es el doble de un radio. Una recta que toca al círculo en un único punto se denomina *tangente* y el punto de contacto se denomina *punto de tangencia*.

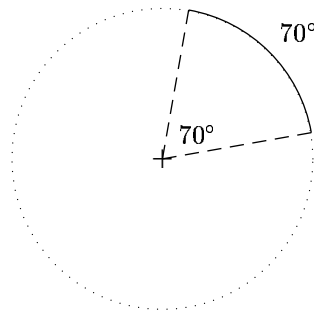


Los arcos de círculo no se miden en centímetros ni en pulgadas, ni en cualquier otra medida de longitud. Se miden en grados (o en radianes). Una circunferencia completa mide 360° . A continuación se muestran dos arcos de 70°



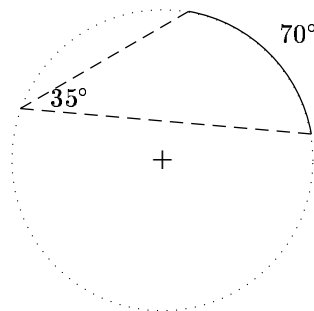
Aunque los dos tienen distinto “largo”, decimos que miden lo mismo, ya que ambos son $\frac{7}{36}$ de la circunferencia completa, esto es, ambos miden 70° . Lo único que hay que recordar es que una expresión como 45° puede referirse tanto a la medida de un ángulo como a la medida de un arco.

Hay varias relaciones entre las medidas de los ángulos y los arcos, las cuales se basan en el siguiente teorema: **“Si un ángulo tiene su vértice en el centro de un círculo, el arco que determina mide lo mismo que el ángulo”**.

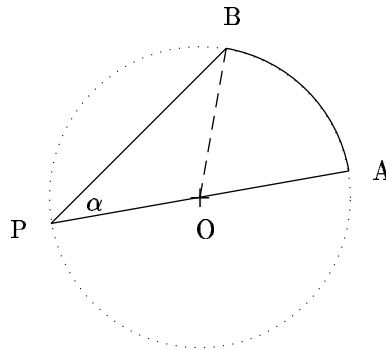


Los ángulos que tienen su vértice en el centro del círculo se llaman ángulos centrales, por lo que el teorema mencionado frecuentemente se enuncia como **“Un ángulo central mide lo mismo que el arco que subtende”**.

Cuando un ángulo tiene su vértice en un tercer punto de la circunferencia, se denomina un ángulo inscrito. **La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que comprende.**



Siendo este uno de los resultados más usados, conviene analizar el porqué es válido. Comencemos con un ángulo inscrito $\angle APB$ en el que uno de los lados es diámetro, y representemos por α a su medida. Supongamos que PA es diámetro y que O es el centro. Unamos a O con B . Como OP y OB son radios, el triángulo BOP es isósceles, por lo que $\angle PBO = \alpha$.

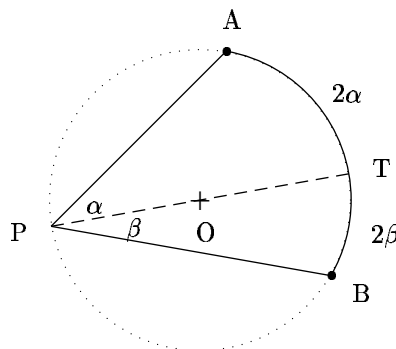


Recordemos que un ángulo externo en un triángulo es igual a la suma de los dos interiores que no son adyacentes, por lo que

$$\angle BOA = \angle PBO + \angle BPO = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

Pero el ángulo $\angle BOA$ es central e igual a 2α , por lo que el arco \widehat{AB} también es igual a 2α . Concluimos que el ángulo inscrito (en este caso) es la mitad del arco que subtiende.

Ahora procedemos a considerar el caso en que el centro del círculo queda dentro del ángulo.

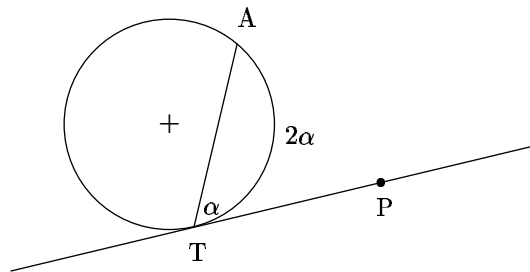


En la figura, el centro cae dentro del ángulo $\angle APB$. Tracemos el diámetro PT . Por lo visto antes, el arco \widehat{AT} es igual a $2\angle APT$ y el arco \widehat{TB} es igual a $2\angle TPB$. Concluimos entonces que

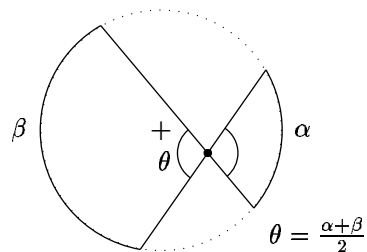
$$\widehat{AB} = \widehat{AT} + \widehat{TB} = 2\angle APT + 2\angle TPB = 2(\angle APT + \angle TPB) = 2\angle APB.$$

Se deja como ejercicio la prueba del caso en que el centro queda fuera del ángulo.

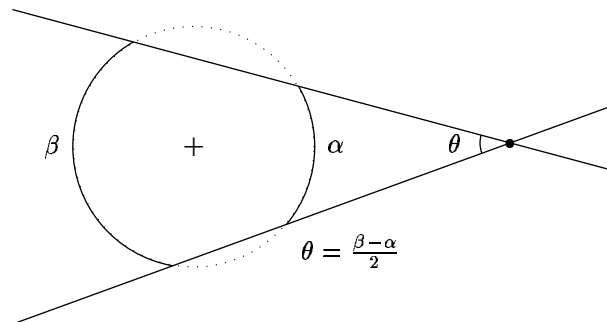
Existen otros ángulos especiales en un círculo, aunque por no ser de uso tan frecuente omitimos las pruebas de la relaciones entre sus medidas y los arcos. El ángulo que se forma con una tangente y una cuerda se denomina ángulo semi-inscrito. **La medida de un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco que comprende.**



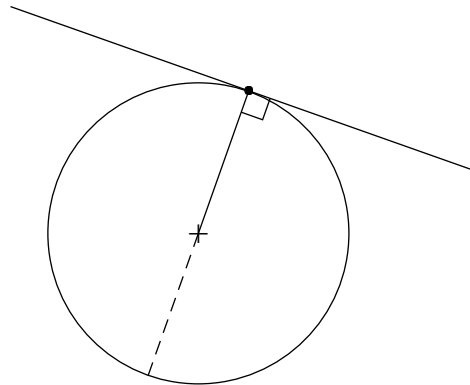
Cuando dos cuerdas se cortan en el interior del círculo, el ángulo que forman se llama ángulo interno y su medida es igual a la mitad de lo que sumen los dos arcos que determina.



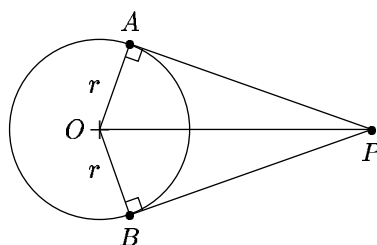
Finalmente, si las cuerdas se cortan en el exterior del círculo, el ángulo se llama exterior, y mide la mitad de la diferencia de lo que miden los arcos que comprende.



Los teoremas mencionados implican una gran variedad de resultados útiles. Por ejemplo, **una recta tangente a un círculo siempre es perpendicular a la línea que une el centro con el punto de tangencia.** Esto se cumple porque se forma un ángulo semi-inscrito que comprende un arco de 180° y por tanto el ángulo es de 90° (cabe notar sin embargo, que este resultado se puede probar por medios alternos, ver cualquier libro clásico de geometría).



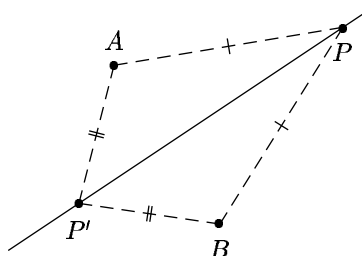
Si desde un punto exterior a un círculo trazamos dos tangentes, éstas tienen la misma longitud. Si P es un punto exterior a una circunferencia, A y B son los puntos de tangencia y O es el centro entonces por el resultado anterior que los triángulos $\triangle OAP$ y OBP son rectángulos. Ambos tienen un cateto igual al radio y comparten la misma hipotenusa, de modo que por el teorema de Pitágoras: $AP = \sqrt{OP^2 - r^2} = BP$.



1.4. Algunos lugares geométricos.

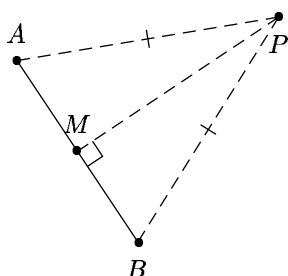
A veces nos interesa encontrar qué puntos del plano poseen cierta propiedad. Por ejemplo, si tomamos un punto en el plano y tomamos una distancia fija, podemos preguntarnos qué puntos del plano están a la distancia dada del punto escogido. Si consideramos una circunferencia con centro en el punto y cuyo radio sea la distancia, todos los puntos de la circunferencia cumplen la propiedad pedida, y más aún, cualquier punto que no esté en la circunferencia no tiene la propiedad. Decimos entonces que **la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto fijo.**

Un lugar geométrico es entonces, un conjunto de puntos que satisfacen una condición establecida. Cambiemos un poco la condición anterior. Fijemos esta vez dos puntos del plano (A y B). Ahora nos preguntamos qué puntos del plano equidistan de esos dos puntos, esto es, cuáles son los puntos P del plano tales que $PA = PB$.



Un punto que claramente pertenece al lugar geométrico es el punto medio del segmento AB . Sea M este punto, y sea P cualquier otro punto del lugar geométrico. Los triángulos $\triangle AMP$ y $\triangle BMP$ son congruentes por el criterio LLL (ya que $AM = MP$ por ser M punto medio, el lado MP

es común, y $PA = PB$ dado que P tiene la propiedad del lugar geométrico). Entonces $\angle AMP = \angle BMP$ y como ambos suman 180° , deben ser iguales a 90° .



Esto quiere decir que P está en la perpendicular a AB que pasa por su punto medio. Esta perpendicular se llama la *mediatriz* de AB . En el lenguaje de conjuntos, lo que probamos es que

$$\text{Lugar geométrico} \subset \text{Mediatriz}$$

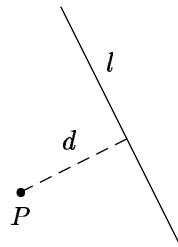
Ahora, tomemos cualquier punto Q de la mediatriz. Como la mediatriz es perpendicular a AB por el punto medio, tenemos que $AM = MB$, $MQ = MQ$ y $\angle AMQ = 90^\circ = \angle BMQ$, por lo que el criterio LAL nos dice que $\triangle AMQ \cong \triangle BMQ$ y por consiguiente $AQ = BQ$. Esto es, los puntos de la mediatriz están en el lugar geométrico. De nuevo usamos la notación de conjuntos para escribir:

$$\text{Mediatriz} \subset \text{Lugar geométrico}$$

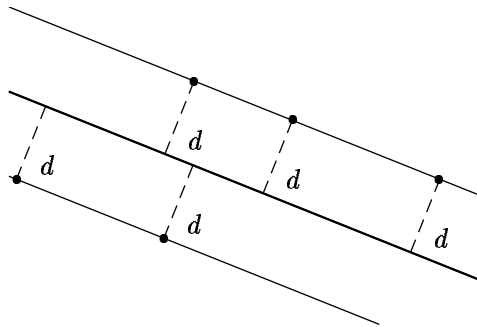
Al combinar las dos partes, obtenemos que el lugar geométrico es igual a la mediatriz. En resumen: **el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos, es la mediatriz del segmento que une a los puntos fijos.**

Lo que es importante recordar en los lugares geométricos es que funcionan como una definición: si un punto cumple la propiedad está en el lugar geométrico, mientras que si tomamos un punto en el lugar geométrico, por definición del mismo, el punto tiene la propiedad.

Consideremos ahora distancias de puntos a rectas. Si l es una recta y P es un punto fuera de ella, la distancia de P a l es lo que mida la perpendicular a l desde P :

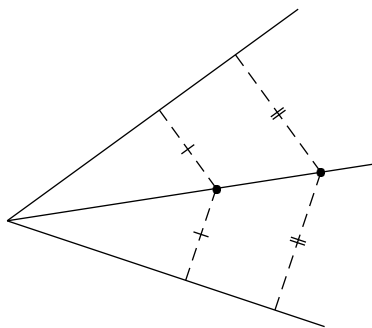


Podemos entonces preguntarnos cuál será el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de una recta fija. Como respuesta obtendríamos dos rectas:



El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta dada está dado por dos rectas paralelas.

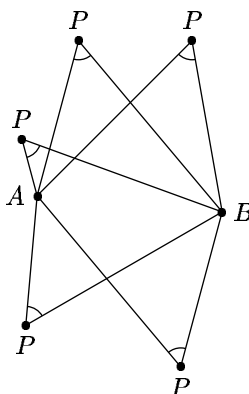
A continuación nos preguntamos cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo:



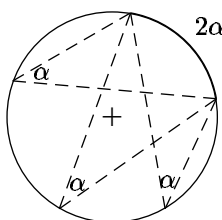
Obtenemos otra recta. Esta recta divide al ángulo en dos partes iguales. Entonces concluimos que **el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos lados de un ángulo es la bisectriz del mismo.** Este último

resultado puede ser de utilidad para demostrar que un punto dado está en la bisectriz de un ángulo, ya que bastaría probar que sus distancias a los lados son iguales (y no se necesita conocer la medida del ángulo).

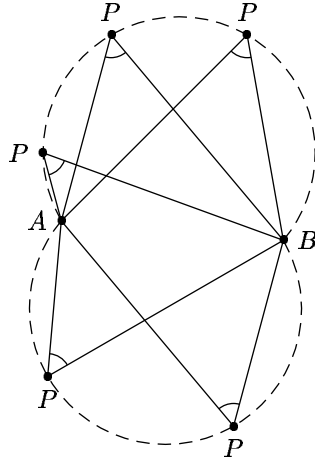
No todos los lugares geométricos se definen en base a distancias. Por ejemplo, dados dos puntos fijos A, B , podemos estudiar el lugar geométrico de los puntos P tales que el ángulo $\angle APB$ tiene una medida fija.



Este lugar geométrico no es una recta, sino una línea curva. Para establecer cuál es el lugar geométrico, recordemos un resultado estudiado anteriormente que presenta una situación similar: el teorema del ángulo inscrito.



La figura anterior nos sugiere que el lugar geométrico estaría formado por dos arcos de circunferencia. De hecho, todos los puntos en los arcos están en el lugar geométrico porque cumplen el teorema del ángulo inscrito (aunque podría haber otros puntos fuera de los arcos que estuvieran en el lugar geométrico).



Puntos de los arcos \in Lugar geométrico

El converso del teorema del ángulo inscrito (dado un arco de circunferencia \widehat{AB} y un ángulo APB que mide la mitad del arco, necesariamente P está en la circunferencia) se prueba más adelante como ejercicio. Esto quiere decir que no hay puntos del lugar geométrico fuera de los arcos:

Puntos fuera de los arcos \notin Lugar geométrico

y concluimos entonces que el conjunto de puntos con la propiedad (el lugar geométrico) consiste precisamente en los arcos indicados.

1.5. Problemas.

Problema. 1.5.1 (YUC1997). Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos tales que AB es perpendicular a DE , BC es perpendicular a EF y CA es perpendicular a FD . Demuestra que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes.

Problema. 1.5.2. Demostrar el converso del teorema del ángulo inscrito: Sea Γ una circunferencia, y A, B dos puntos en ella. Si P es un punto en el plano tal que el ángulo $\angle APB$ mide la mitad del arco \widehat{AB} entonces P debe pertenecer a la circunferencia.

Problema. 1.5.3. Si $ABCDEF$ es un hexágono donde los lados opuestos son iguales y paralelos, demuestra que el área del triángulo ACE es la mitad del área del hexágono.

Problema. 1.5.4 (YUC1993). Consideremos un triángulo en el que uno de sus catetos vale 10. A este cateto se trazan 5 paralelas desde la hipotenusa al otro cateto, de modo que la distancia entre cada paralela sea la misma. Calcular la suma de las longitudes de las 5 paralelas y el cateto.

Problema. 1.5.5. En la figura se tienen dos círculos concéntricos. El grande tiene radio R y el chico r . El segmento EF es tangente al círculo pequeño. ¿Cuánto mide EF ?

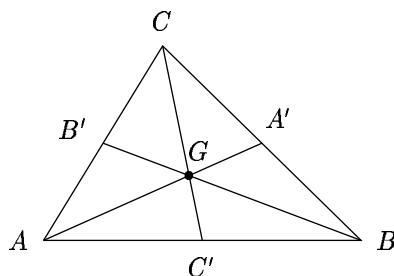
Capítulo 2

Elementos importantes del triángulo.

En todo triángulo existen cientos de puntos y líneas que poseen propiedades especiales. En este capítulo estudiaremos los principales centros del triángulo así como otros elementos importantes.

2.1. El centroide.

A los puntos con propiedades especiales en los triángulos suele llamarse-les *centros del triángulo*. Existen cientos de ellos, pero unos cuantos destacan entre ellos. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera, y sean A' , B' , C' los respectivos puntos medios de los lados BC , CA y AB , entonces se cumple que las líneas AA' , BB' , CC' pasan por un mismo punto.



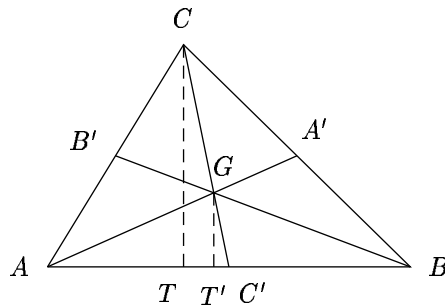
Las líneas que unen los puntos medios de cada lado con el vértice opuesto se llaman *medianas* del triángulo y el punto G donde se cortan las

tres líneas se llama *centroide* del triángulo. Otros nombres que recibe son *gravicentro*, *baricentro*, *centro de gravedad* o incluso simplemente *centro* del triángulo aunque esta última forma se desaconseja porque se confunde fácilmente con otros puntos importantes del triángulo.

La propiedad más notable del centroide, es que **el centroide divide a cada una de las medianas del triángulo en razón 2 : 1**. Esto quiere decir que

$$AG = 2GA', \quad BG = 2GB', \quad CG = 2GC'.$$

De este hecho se deriva que cada uno de los tres triángulos $\triangle GBC$, $\triangle GCA$, $\triangle GAB$ tienen un tercio del área del $\triangle ABC$.



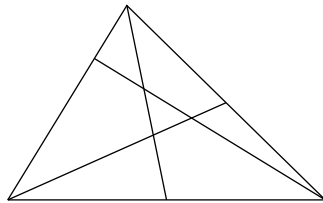
Tracemos las alturas CT y GT' de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle GBC$. Notemos que por tener lados paralelos, los triángulos $\triangle CTC'$ y $\triangle GT'C'$ son semejantes de modo que

$$\frac{GC'}{CC'} = \frac{GT'}{CT}.$$

Pero como G es el centroide y CC' es una mediana, se cumple que $CG = 2GC'$, lo que es lo mismo que $CC' = 3GC'$. Esto significa que $GC'/CC' = 1/3$ y por tanto $GT'/CT = 1/3$. Concluimos entonces que $CT = 3GT'$ (la altura de $\triangle ABC$ es el triple de la del $\triangle GBC$). Como los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle GBC$ tienen la misma base, y la altura del primero es el triple de la del segundo, el área de $\triangle ABC$ es el triple de la del GBC . Este argumento lo podemos repetir para los triángulos $\triangle GCA$ y $\triangle GAB$, concluyendo que los tres triángulos pequeños tienen la misma área (un tercio de la de $\triangle ABC$). Esto concluye la prueba de que **el centroide del triángulo lo divide en tres triángulos de igual área al unirse con los vértices**. En la sección de problemas se demuestra que el centroide es el único punto con esta propiedad.

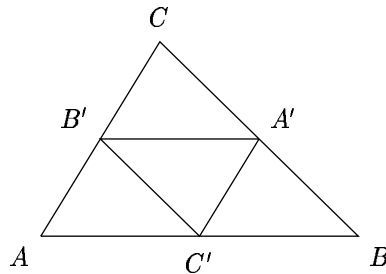
Concentremos nuestra atención en los 6 triángulos que se obtienen al dibujar las tres medianas. Cada uno de ellos tiene un sexto del área del triángulo original; el triángulo $\triangle AC'G$ tiene la misma altura que el triángulo $\triangle AGB$ pero su base es solo la mitad, de modo que el área de $\triangle AC'G$ es un medio de la del $\triangle AGB$ y por tanto igual a un sexto de la del $\triangle ABC$. Un argumento similar se aplica a los cinco triángulos restantes. Todas estas propiedades del centroide relativas a áreas se relacionan estrechamente con el hecho de que el centroide es el centro de gravedad del triángulo: **cualquier línea que pase por el centroide divide al triángulo en dos regiones de área igual.**

Antes de continuar, quizás valga la pena mencionar un detalle que podría pasarse por alto: la existencia del centroide necesita demostración. Hemos definido el centroide como el punto por el que pasan las tres medianas de un triángulo sin la seguridad de que estas tres líneas efectivamente pasan por un mismo punto, ya que en general tres líneas no pasan por un mismo punto:



Generalmente, se demuestra la existencia del centroide por medio de semejanzas, sin embargo nosotros la obtendremos más adelante como consecuencia del Teorema de Ceva. Mientras tanto, daremos por sentado la concurrencia de las medianas (es decir, que pasan por un mismo punto) y con ello asumiremos la existencia del centroide.

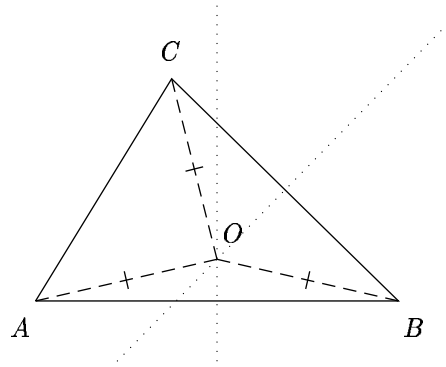
Otro elemento del triángulo relacionado con el centroide y las medianas es el *triángulo de los puntos medios* o simplemente el *triángulo medio*. Como su nombre lo indica, es el triángulo determinado por los puntos medios de los lados en un triángulo dado:



Los lados del triángulo medio $\triangle A'B'C'$ son paralelos a los del $\triangle ABC$, y por tanto ambos son semejantes. En particular $AB/A'B' = AC/A'C' = (2A'C')/A'C' = 2$, lo que quiere decir que $AB = 2A'B'$. Hemos probado que los lados del triángulo medio miden la mitad de los correspondientes en el triángulo original. El triángulo medio divide al triángulo original en cuatro partes congruentes entre sí (criterio LLL), por lo que el área del triángulo medio es un cuarto del área del triángulo original.

2.2. El circuncentro.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Tracemos la mediatriz de AB (la perpendicular que pasa por su punto medio) y la mediatriz de BC . Sea O el punto donde se cortan. Recordemos que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos. Como O está en la mediatriz de AB entonces $OA = OB$, y como está en la mediatriz de BC entonces $OB = OC$. Esto implica que $OC = OA$, la cual es la condición que cumplen los puntos de la mediatriz de CA . Nuestra conclusión es que las mediatrices de los tres lados pasan por un mismo punto (son concurrentes), y ese punto está a la misma distancia de A, B y C .

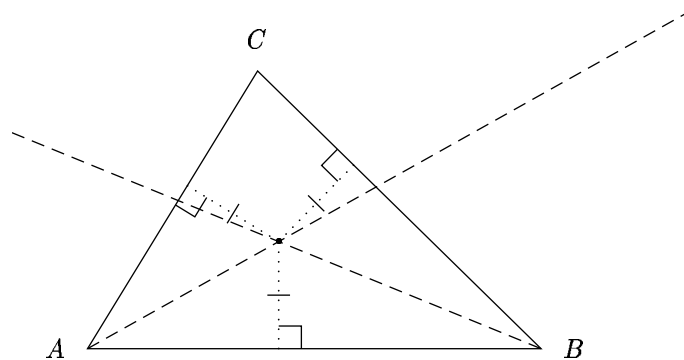


Lo anterior nos dice que si trazamos un círculo con centro O y radio PA , el círculo pasará por los otros dos vértices. Hemos probado entonces que para todo triángulo existe un único círculo que pasa por sus tres vértices. Tal círculo se denomina el *circuncírculo* del triángulo, y su centro se denomina el *circuncentro* del triángulo. El radio del circuncírculo se llama *circunradio*. Podemos resumir todo lo anterior como: **el circuncentro de un triángulo es el único punto que equidista de los tres vértices y se encuentra en el punto de intersección de las mediatrices de los lados.**

Si el triángulo es agudo, el circuncentro queda en su interior, mientras que si es obtuso en el exterior. cuando el triángulo es rectángulo, el circuncentro queda en el punto medio de la hipotenusa (observa que el ángulo recto es un ángulo inscrito). Como el circuncentro equidista de los tres vértices, tenemos que el segmento que une el punto medio de la hipotenusa y el vértice de 90° mide lo mismo que la mitad de la hipotenusa, o de manera más simple: **en un triángulo rectángulo, el circunradio vale la mitad de la hipotenusa.**

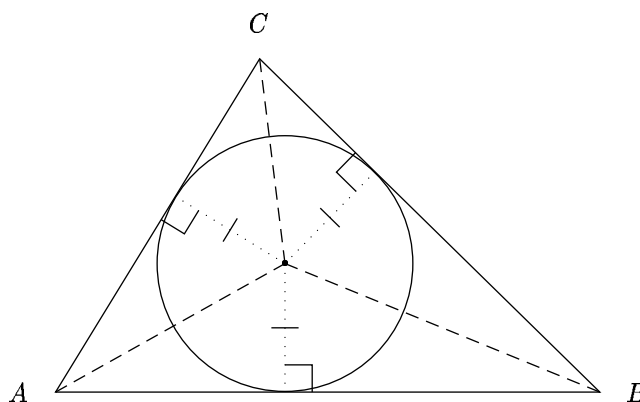
2.3. El incentro y los excentros.

Ahora consideremos el triángulo $\triangle ABC$ y tracemos las bisectrices. Como las bisectrices son el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos lados, tenemos que los puntos de la bisectriz del $\angle ABC$ están a la misma distancia de AB que de BC , mientras que los de la bisectriz del $\angle CAB$ equidistan de los lados AB y AC .

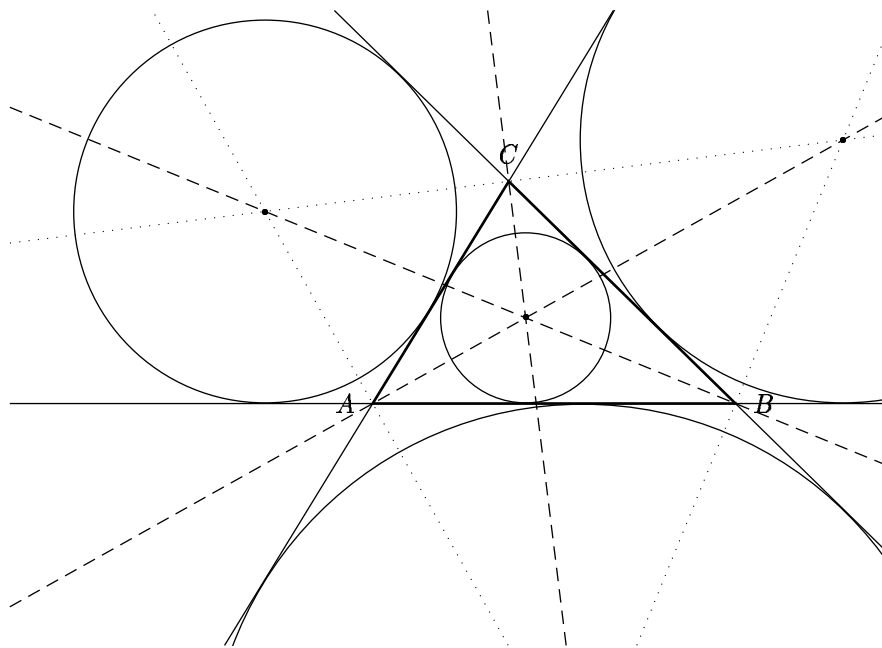


Esto quiere decir que el punto donde estas dos bisectrices se cortan está a la misma distancia de AB , BC y CA y por tanto la tercera bisectriz debe pasar por ahí: **las tres bisectrices internas de un triángulo pasan siempre por un mismo punto.**

El punto donde las tres bisectrices internas se cortan se denomina el *incentro* del triángulo. Cuando decimos que ese punto equidista de los tres lados queremos decir que si trazamos perpendiculares a los tres lados, estas deben medir lo mismo. En particular, si trazamos un círculo con esa radio y cuyo centro sea el punto de corte de las bisectrices, obtenemos un círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. Este círculo se llama el *incírculo* del triángulo, y su radio se conoce como el *inradio*.

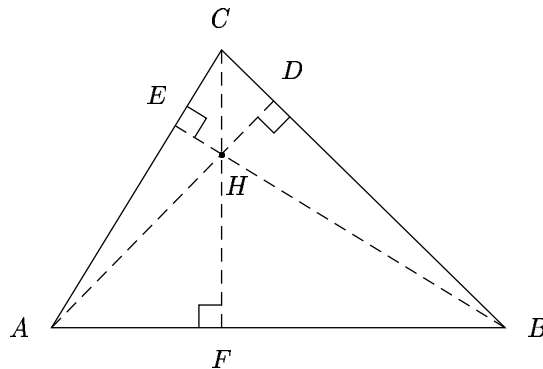


Si consideramos también las bisectrices externas a los lados (que junto con las internas forman el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados (o sus prolongaciones) obtenemos otros tres puntos de corte fuera del triángulo denominados *excentros*. Por razones similares a las expuestas para el *incentro*, existen círculos alrededor de los excentros que son tangentes a los lados (o a sus prolongaciones), estos se denominan los *excírculos* del triángulo.



2.4. El ortocentro.

Finalmente, consideremos las tres alturas de un triángulo (perpendiculares a los lados que pasan por los vértices opuestos). Al igual que con las medianas, las mediatrices y las bisectrices, se cumple que **las tres alturas de un triángulo concurren**. No daremos una prueba ahora, sino que lo obtendremos más adelante a partir del Teorema de Ceva.



El punto donde se cortan las alturas de un triángulo se llama *ortocentro* del triángulo. En la figura anterior, H es el ortocentro de $\triangle ABC$. Otro elemento del triángulo que se relaciona con las alturas es el *triángulo órtico*, que está formado por los pies de las tres alturas. Así, $\triangle DEF$ es el triángulo órtico del $\triangle ABC$.

Una propiedad muy notable es que el **ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico**. En la figura anterior, quiere decir que H es el incentro de $\triangle DEF$. Para demostrar esto, hay que probar que AD , BE , CF son las bisectrices internas del $\triangle DEF$.

Denotemos por α la medida del ángulo \angle

2.5. Problemas

Problema. 2.5.1. *El centroide de un triángulo coincide con el centroide de sus triángulo medio.*

Problema. 2.5.2. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y P un punto en el triángulo tal que los triángulos $\triangle APB$, $\triangle BPC$ y $\triangle CPA$ tienen la misma área. Demuestra que P es el centroide del triángulo.*

Problema. 2.5.3 (YUC1994). *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y G el círculo que pasa por A , B y C . Al punto medio de BC le llamamos D y sea E un punto en el arco \widehat{BC} tal que DE es perpendicular a BC . Demuestra que AE es la bisectriz de $\angle BAC$.*

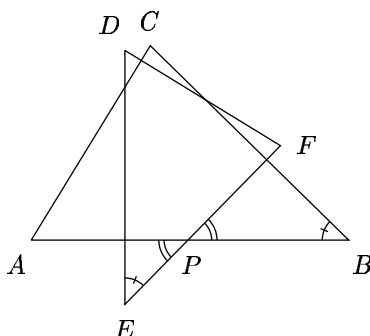
Problema. 2.5.4. *Dado un triángulo ABC , donde a es la longitud de BC , b es la longitud de CA , c es la longitud de AB , y r el radio del círculo inscrito, demostrar que el área del triángulo es igual a*

$$r \left(\frac{a + b + c}{2} \right)$$

Capítulo 3

Soluciones

1.5.1 Para probar que dos triángulos son semejantes, el camino usual es probar que sus ángulos son iguales. Las hipótesis del problema nos dicen que $AB \perp DE$, $BC \perp EF$, $CA \perp FD$.



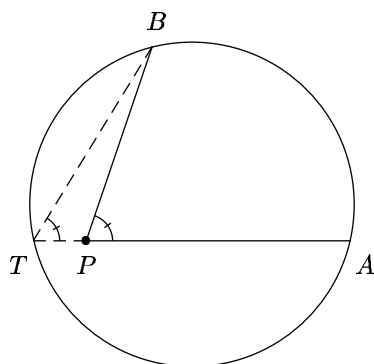
Sea P el punto de intersección de AB con EF . Los ángulos $\angle CBA$ y $\angle BPF$ suman 90° porque $EF \perp CB$. Por otro lado $\angle FED$ y $\angle APE$ suman 90° pues $AB \perp DE$. Además $\angle BPF = \angle APE$, por lo que los complementos deben ser iguales: $\angle CBA = \angle FED$. Un argumento semejante muestra que los otros dos pares de ángulos también son iguales.

En esta prueba asumimos que ningún vértice de los triángulos queda dentro del otro triángulo. La prueba se puede llevar a cabo usando las prolongaciones de los lados en caso contrario. Verificar esta afirmación.

1.5.2 Procederemos por contradicción. Supondremos que P no pertenece a la circunferencia, llegaremos a algo imposible, y por tanto concluiremos

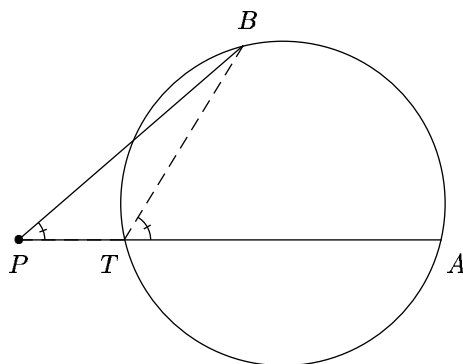
que la única opción que nos queda es que P pertenezca a la circunferencia.

Si P no está en la circunferencia, tenemos dos opciones: P está dentro de la circunferencia o P está fuera. Primero consideremos a P dentro de la circunferencia. Prolonguemos AP hasta cortar la circunferencia en un punto T , y unamos T con B .



El ángulo $\angle ATB$ mide la mitad de \widehat{AB} , lo mismo que $\angle APB$ (es nuestra hipótesis). Esta igualdad de ángulos correspondientes significa que TB y PB son paralelas, lo cual es claramente imposible porque ambas rectas se cortan en B .

Cuando P está fuera de la circunferencia, consideramos a T como el punto de corte de AP con la circunferencia y el mismo argumento que usamos en el párrafo anterior nos muestra que esta situación es imposible.



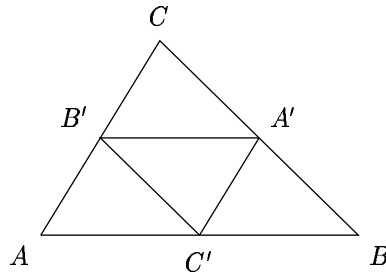
Si P no puede estar dentro de la circunferencia, y no puede estar fuera, necesariamente está en la circunferencia.

1.5.3 Trácese por F una paralela a AB , por B una paralela a CD y por D una paralela a EF . Estas 3 líneas se van a cortar en el centro P del hexágono y se van a formar 3 paralelogramos: $ABPF$, $BCDP$ y $DEFP$. El triángulo FPB es el mismo que el FAB , el BPD es el congruente al BCD y el triángulo FPD es igual al DEF . Entonces el área del hexágono es el doble que la del triángulo ACE .

1.5.4 Acompletemos el dibujo como se muestra, y notamos que la suma que buscamos es la mitad de la suma de todas las líneas verticales. Por otro lado, todas las líneas verticales miden 10, por lo que la suma total es 60 y así la respuesta es 30.

1.5.5 Si dibujamos el triángulo ADE (donde A es el centro de los dos círculos) vemos que es rectángulo y al aplicar el Teorema de Pitágoras obtenemos $DE = \sqrt{R^2 - r^2}$. Entonces $EF = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

2.5.1 Basta con probar que las medianas de un triángulo también son medianas del triángulo medio (y por tanto el punto común es el mismo). Sea $\triangle A'B'C'$ el triángulo medio del $\triangle ABC$.



Los lados del triángulo medio son paralelos a los del triángulo original, entonces $B'A' \parallel AC'$ y $AB' \parallel C'A'$ y de este modo, el cuadrilátero $AB'A'C'$ es paralelogramo. Pero las diagonales de un paralelogramo se bisecan, esto quiere decir que AA' pasa por el punto medio de $B'C'$ y por tanto es mediana de $\triangle A'B'C'$. Un argumento similar trabaja para las otras medianas. Como las medianas de $\triangle ABC$ lo son también de $\triangle A'B'C'$, el punto común es el mismo y por tanto los centroides coinciden.

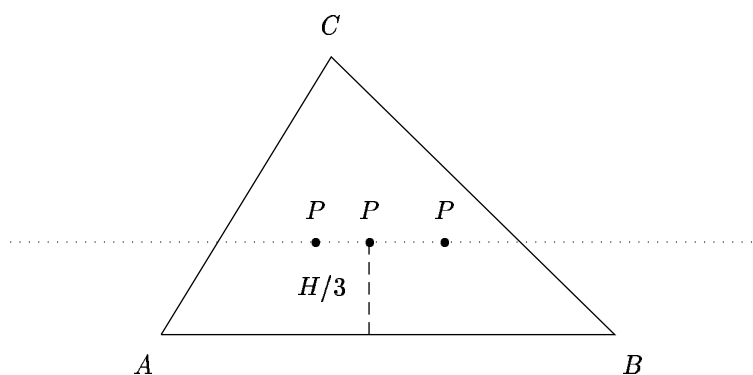
2.5.2 Hemos probado que el centroide tiene la propiedad que se menciona. Si ahora probamos que sólo existe un punto con esa propiedad,

entonces P necesariamente es el centroide (porque no hay otra posibilidad).

Las condiciones del problema implican que el área de $\triangle ABP$ es un tercio de la del $\triangle ABC$. Si denotamos por h y H sus respectivas alturas (que pasan por A), tenemos que

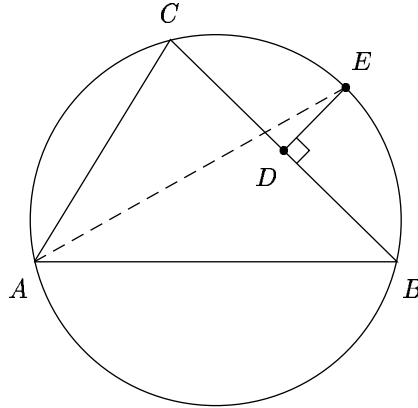
$$\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{AB \cdot h}{2}\right) = \frac{AB \cdot H}{2}$$

que al simplificar nos arroja $H = 3h$. En otras palabras, la altura del $\triangle ABG$ es un tercio de la del ABC . Nos preguntamos entonces cuáles son los puntos que cumplen tal condición. En este caso el lugar geométrico es una paralela a AB a distancia $h = H/3$.



Ahora, todo ese proceso lo repetimos para el triángulo $\triangle BPC$ que también tiene un tercio del área del $\triangle ABC$, y encontramos que P debe encontrarse en una paralela a BC a un tercio de la altura del $\triangle ABC$ que pasa por A . De este modo la única posición posible para P es donde se corta esta paralela con la que habíamos dibujado antes. Concluimos que sólo hay un punto con la propiedad pedida, y como el centroide la tiene, el centroide es el único punto.

2.5.3 Dado que D es el punto medio de BC , tenemos que $BD = DC$. Además $\angle BDE = 90^\circ = \angle EDC$ y $DE = DE$, por lo que el criterio LAL nos dice que $\triangle BDE \cong \triangle CDE$.



Los ángulos correspondientes son iguales: $\angle EBD = \angle ECD$, y como ambos son inscritos, los arcos que subtienden son iguales (miden el doble de lo que miden los ángulos).

Así, $\widehat{EB} = \widehat{EC}$. Los ángulos $\angle EAB$ y $\angle EAC$ subtienden los arcos mencionados por lo que ambos son iguales. Esto quiere decir que AE es la bisectriz de $\angle BAC$.

2.5.4 Como los lados son tangentes al círculo y las tangentes son perpendiculares a las líneas que unen el centro con el punto de tangencia, tenemos que $EI \perp BC$ (es decir, EI es altura del triángulo BIC). Entonces el área del triángulo BIC es $BI \times EC/2 = ar/2$. De manera similar, el área del triángulo CIA es $br/2$ y la del AIB es $cr/2$. Al sumarlas todas llegamos a que el área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{ar + br + cr}{2} = r \left(\frac{a + b + c}{2} \right)$$