

19^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Entrenamiento nacional, marzo 2006
Algunas estrategias en Teoría de Números
MEDALLISTAS DE ORO

1. Factorizar una expresión algebraica

Problema 1. Demuestra que $n^5 - 5n^3 + 4n$ es múltiplo de 120 para todo entero n .

Problema 2. Sea p un primo. Resuelve la siguiente ecuación en los enteros:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}.$$

Problema 3. (México 1990) Demuestra que para todo entero $n > 1$, $(n-1)^2$ divide a $n^{n-1} - 1$.

Problema 4. Demuestra que

$$\underbrace{100 \cdots 01}_{1961}$$

no es un número primo.

Problema 5. Demuestra que si $n > 1$ es un entero, entonces $4^n + n^4$ no es un número primo.

Problema 6. Demuestra que para todo entero positivo n , $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ tiene al menos n factores primos diferentes.

Problema 7. Encuentra todos los primos menores que 10^{19} que pueden escribirse de la forma $n^n + 1$ para algún entero positivo n .

Problema 8. ¿Existe un polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros tal que $f(7) = 11$ y $f(11) = 13$?

Problema 9. (Centro 1999) Sea $a > 17$ un entero tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Prueba que existen enteros positivos distintos b y c tales que $a + b$, $a + c$, $b + c$ y $a + b + c$ son todos cuadrados perfectos.

Problema 10. ¿Será posible encontrar un polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros para el cual existan tres enteros distintos a , b y c tales que $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$?

Problema 11. Sean a , b , c y d enteros positivos tales que $ab = cd$. Demuestra que $a^n + b^n + c^n + d^n$ no es primo para ningún entero positivo n .

Problema 12. Prueba que en la sucesión

$$\sqrt{24 \cdot 1 + 1}, \sqrt{24 \cdot 2 + 1}, \sqrt{24 \cdot 3 + 1}, \dots$$

aparecen todos los primos excepto 2 y 3.

Problema 13. Sea Λ el conjunto de todos los puntos del plano con coordenadas enteras. Muestra que puntos diferentes de Λ tienen distancias diferentes al punto $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$.

Problema 14. (Imo 2000) ¿Será posible encontrar un entero positivo N divisible entre exactamente 2000 primos, tal que

$$N | 2^N + 1?$$

Problema 15. (Ibero 2000) Determina todas las ternas x , y y z de enteros positivos mayores que 1 tales que

$$(x + 1)^y - x^z = 1.$$

2. Aprovechar que el producto de dos coprimos sea cuadrado (potencia n -ésima)

Si ab es un cuadrado perfecto (potencia n -ésima perfecta) y a y b son coprimos, entonces tanto a como b son cuadrados perfectos (potencias n -ésimas perfectas).

Problema 16. Resuelve la siguiente ecuación, en los enteros positivos:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Problema 17. Sea n un entero positivo. Prueba que si $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ es un entero, entonces es un cuadrado perfecto.

Problema 18. Resuelve la siguiente ecuación en los enteros:

$$x^3 + 3 = 4y(y + 1).$$

3. Fijarse en el orden de un entero módulo otro entero

Si a y n son enteros positivos coprimos, existen enteros positivos x tales que $a^x \equiv 1 \pmod{n}$, por ejemplo $x = \varphi(n)$; además, si h es el más pequeño de estos enteros positivos (h se llama el orden de a módulo n), el conjunto de los enteros positivos x tales que $a^x \equiv 1 \pmod{n}$ consiste precisamente de los múltiplos positivos de h .

Problema 19. Sean $a > 1$ y $n > 0$ enteros. Prueba que

$$n | \varphi(a^n - 1).$$

Problema 20. Determina todos los enteros positivos impares n tales que n divide a $3^{12} - 1$ pero n no divide a ningún número de la forma $3^k - 1$ con k un entero entre 0 y 11 (inclusive).

4. Emplear el Teorema de Wilson

Si p es un primo, $p | (p - 1)! + 1$; además, si $n > 1$ no es primo, $n \nmid (n - 1)! + 1$.

Problema 21. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(5) = 3$ y

$$f(n) = f(n - 1) + (n - 2)! - n \left\lfloor \frac{(n - 2)!}{n} \right\rfloor$$

para toda $n > 5$. Determina $f(100)$.

5. Simplificar una ecuación

Problema 22. Resuelve la siguiente ecuación, en los enteros:

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2).$$

Problema 23. Determina todas las ternas x , y y z de enteros tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

Problema 24. Resuelve la siguiente ecuación, en los enteros:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2xyzw.$$

Problema 25. Determina todas las ternas x , y y z de enteros tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2.$$

Problema 26. Sean n un entero positivo y t un entero. Prueba que la siguiente ecuación no tiene soluciones enteras:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4^n(8t + 7).$$

Problema 27. Resuelve la siguiente ecuación, en los enteros:

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2.$$

6. Emplear las propiedades algebraicas de las raíces n -ésimas de 1

Si $\omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \omega_2 = e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{n}}, \dots, \omega_n = 1$ son las n raíces n -ésimas de 1, entonces $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 0$; además, en virtud de que $x^n - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + 1)$ se factoriza $x^n - 1 = (x - 1)(x - \omega_1) \dots (x - \omega_{n-1})$ en $\mathbb{C}[x]$, $(x - \omega_1) \dots (x - \omega_{n-1}) = x^n + x^{n-1} + \dots + 1$ (como polinomios).

Problema 28. ¿Para qué enteros positivos n es $n^5 + n^4 + 1$ un primo?

7. Expresar un polinomio simétrico en términos de polinomios simétricos elementales

Todo polinomio simétrico en n indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ puede escribirse en términos de los polinomios simétricos elementales

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \sigma_2 &:= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ \sigma_n &:= x_1x_2 \dots x_n.\end{aligned}$$

Problema 29. (Imo 1984) Encuentra dos enteros positivos a y b tales que $7^7 \mid (a+b)^7 - a^7 - b^7$ pero $7 \nmid ab(a+b)$.

8. Hacer estimaciones

Si $a \mid b$ y $b \neq 0$ entonces $|a| \leq |b|$.

Problema 30. (Imo 1998) Determina todas las parejas de enteros positivos a y b tales que

$$ab^2 + b + 7 \mid a^2b + a + b.$$

Problema 31. (Imo 1994) Determina todas las parejas de enteros positivos m y n , no ambos 1, tales que

$$mn - 1 \mid n^3 + 1.$$