



XXII Olimpiada De Matemáticas, Yucatán 2008
Tercer Material de Entrenamiento, Geometría
Entrenadores: Tony
Jueves 19 de junio del 2008



Estos son algunos teoremas, criterios, lemas, proposiciones, definiciones, etc. De geometría que te servirán al resolver problemas de este tipo.

Teoremas:

1. Las medianas dividen al triángulo en seis triángulos que tienen la misma área.
2. Un punto M dentro del triángulo ABC tiene la propiedad de que $(ABM) = (AMC)$ si y solo si M se encuentra sobre la mediana AA' .
3. El centroide G es el único punto dentro del triángulo ABC que tiene la propiedad de que los triángulos BCG , CAG y ABG tienen la misma área.
4. El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro del triángulo órtico.

Lema:

1. Consideremos ABC un triángulo. Sean H su ortocentro, O su circuncentro y A' el punto medio del lado BC , entonces se tiene que $AH = 2A'O$.

Teorema:

1. En un triángulo ABC el ortocentro, el gravicentro y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la **recta de Euler**.

La circunferencia de los nueve puntos:

Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, están en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio del circuncírculo del triángulo ABC .

Teorema:

1. El centro de la circunferencia de los nueve puntos se encuentra en la recta de Euler y es el punto medio del segmento HO .

Teorema de Ceva:

Si en un triángulo ABC se toman puntos D, E y F sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, de tal forma que las rectas AD, BE y CF concurren en un punto, entonces:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

El inverso de este teorema también es cierto, es decir, si la ecuación anterior es verdadera entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Teorema de Menelao:

Si una recta intersecta las rectas BC, CA y AB de un triángulo ABC en los puntos L, M y N respectivamente, entonces

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

Inversamente, si L, M y N son puntos de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para el cual se cumple la relación anterior, entonces L, M y N son colineales.

Teorema de la bisectriz:

La bisectriz interna AL (respectivamente externa AL') del ángulo A de un triángulo ABC divide internamente (resp. Externamente) al lado opuesto BC en razón $\frac{AB}{CA}$, esto es:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA} \quad \left(\text{resp.} \quad \frac{BL'}{CL'} = \frac{AB}{CA} \right)$$

Donde L es el punto de intersección de la bisectriz interna con el lado BC (respectivamente, L' el punto de intersección de la bisectriz externa con la prolongación del lado BC).

Problemas:

1. Si los ángulos del triángulo ABC están en razón 4:2:1, prueba que los lados cumplen que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

2. Sea ABC un triángulo y la bisectriz desde A corta a BC en 2 y 4 unidades. Si la altura desde A mide $\sqrt{15}$ unidades, halla el valor de los lados del triángulo.

3. Sean A, B, C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea Y una circunferencia tangente a AC en B, y sean X y Z las circunferencias de diámetros AB y BC respectivamente. Sea P el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias X y Y; sea Q el punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias Y y Z. Supón que la recta PQ corta a X en un punto R distinto de P, y que esa misma recta PQ corta a Z en un punto S distinto de Q. Demuestra que concurren AR, CS y la tangente común a X y Z por B.
4. Demuestre que los seis segmentos de línea que unen por pares, el incentro y los tres excentros de un triángulo, son bisecados por su circunferencia circunscrita.
5. Sea ABC un triángulo con gravicentro G y sea MN una recta que pasa por G con M sobre AB y N sobre AC. Demuestra que $(AM)(NC) + (AN)(MB) = (AM)(AN)$
6. Sean M y N puntos en los lados AB y BC, respectivamente, del paralelogramo ABCD tales que $AM = NC$. Sea Q el punto de intersección de AN y CM. Demuestra que DQ es bisectriz del ángulo CDA.
7. Sea ABCD un trapecio con base mayor AB tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y sea E el punto de intersección de las rectas OB y CD. Demuestra que $BC^2 = (CD)(CE)$
8. En el triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A y la mediana trazada a partir de A cortan a BC en dos puntos distintos D y E, respectivamente. Sea M el punto de intersección de AE y la perpendicular a AD trazada a partir de B. Prueba que AB y DM son paralelas.
9. Sea M la intersección de las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo ABCD. La bisectriz del ángulo ACD interseca a BA en K. Si $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, prueba que $\angle BKC = \angle CDB$.
10. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias que se intersectan en los puntos A y B. La tangente común más próxima al punto A toca las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos C y D respectivamente. Una paralela a la recta CD se traza a través de A, cortando a C_1 y C_2 en los puntos E y F respectivamente. Sean G e I las intersecciones de la recta DA con C_1 y BC respectivamente (G distinto de A). Análogamente, sean H y J las intersecciones de CA con C_2 y BD respectivamente. Finalmente, sean K y L las intersecciones de CG con BE y de DH con BF respectivamente. Demuestra que los puntos I, J, K y L están sobre una recta paralela a CD.
11. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sea D el pie de la perpendicular desde B sobre AC, y sea E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo BDC con BC. Sean M y N los puntos medios de BE y DC, respectivamente, y sea F el punto de intersección de MN con BD. Demuestra que $AD = 2BF$.
12. En un triángulo escaleno ABC, la mediana trazada a partir de A, la altura trazada a partir de B y la bisectriz trazada a partir de C, son concurrentes. ¿qué relación existe entre las medidas de los lados de un triángulo?

13. En el triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A y la mediana trazada a partir de A cortan a BC en 2 puntos distintos D y E, respectivamente. Sea M el punto de intersección de AE y la perpendicular a AD trazada a partir de B. Prueba que AB y DM son paralelas.