



XXII Olimpiada de Matemáticas, Yucatán 2008
Segundo Material de Entrenamiento, Geometría
Entrenador: Tony
Jueves 29 de Mayo del 2008



Estos son algunos Teoremas, Criterios, Lemas, Proposiciones, Definiciones, etc. de Geometría que te servirán al resolver problemas.

Lema:

1. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a la mitad de tal tercer lado.

Teoremas:

1. Las medianas de un triángulo son concurrentes. Al punto de concurrencia se le conoce como Gravicentro.
2. Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes. Este punto de concurrencia es el centro de la circunferencia inscrita y se le conoce como Incentro.
3. Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes. Este punto de concurrencia es el centro del circuncírculo del triángulo y se le conoce como circuncentro.
4. Las alturas de un triángulo son concurrentes. A este punto de concurrencia se le conoce como Ortocentro.

Teorema de la medida del ángulo inscrito:

La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, es la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

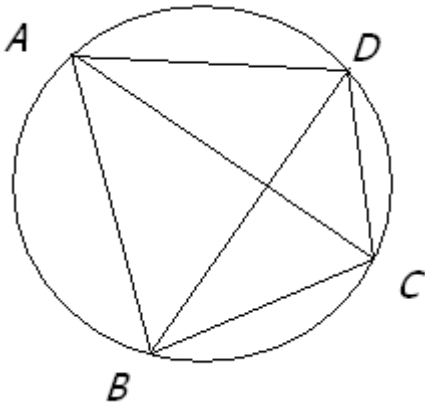
Corolarios:

1. Todos los ángulos inscritos que abren un mismo arco tienen la misma medida.
2. Sean A y C dos puntos fijos sobre una circunferencia se tiene que: $\angle ABC = \angle AB'C$ o bien que $\angle ABC$ y $\angle AB'C$ son suplementarios.
3. Sean A y C dos puntos fijos. El conjunto de puntos B que cumplen que el ángulo $\angle ABC$ es constante, consta de dos arcos de circunferencia del mismo radio.
4. Sean A y C dos puntos fijos, el conjunto de puntos B que cumplen que $\angle ABC$ es un ángulo recto es una circunferencia de diámetro AC.

Teorema sobre la medida del ángulo semi-inscrito:

Todo ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

Teoremas:



Para un cuadrilátero convexo ABCD podemos, además de ver los ángulos en A, en B, en C y en D, considera otros ocho ángulos, que se forman con los lados del cuadrilátero y las diagonales AC y BD.

Si el cuadrilátero es cíclico se tiene:

- (i) $\angle A + \angle C = 180^\circ$
- (ii) $\angle B + \angle D = 180^\circ$
- (iii) $\angle BAC = \angle BDC$,
- (iv) $\angle CBD = \angle CAD$,
- (v) $\angle BCA = \angle BDA$,
- (vi) $\angle ABD = \angle ACD$.

Recíprocamente si alguna de las afirmaciones anteriores es cierta, entonces el cuadrilátero es cíclico.

Teoremas de Potencia:

1. Si dos rectas AB y CD con A, B, C, D sobre una circunferencia, se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
2. Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en C, interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PC^2 = PA \cdot PB$.
3. Si AB, CD son dos segmentos que se intersectan en P de manera que, como segmentos dirigidos, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ entonces A, B, C y D se encuentran sobre una circunferencia.
4. Si A, B, C y P son puntos de manera que P, A, B están alineados y $PC^2 = PA \cdot PB$, entonces PC es tangente en C al circuncírculo del triángulo ABC.

Problemas:

1. AB y AC son tangentes a la circunferencia de centro O en B y C, respectivamente, y CE es perpendicular al diámetro BD. Probar que $(BE)(BO) = (AB)(CE)$.
2. Sea ABC un triángulo y P, Q, R puntos en los lados BC, AC y AB, respectivamente, demuestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos AQR, CQP y BPR, pasan por un mismo punto.
3. Sea ABC un triángulo, sean N y M las intersecciones de la bisectriz desde A con BC y la circunferencia circunscrita de ABC, respectivamente. Probar que $(AN)(AM) = (AB)(AC)$.
4. Para un punto externo P, sean PA y PB tangentes a la circunferencia de centro O. se toma un punto Q en el mayor o menor arco AB, se trazan las perpendiculares desde Q, hacia AB, PA y PB. Probar que la perpendicular a AB es la media proporcional entre las otras dos perpendiculares.
5. Las cuerdas AC y DB de una circunferencia son perpendiculares y se intersectan en un punto G. en el triángulo AGD la altura desde G intersecta AD en E, y cuando la extiendes intersecta a BC en P. Probar que BP = PC.
6. Un cuadrado ABCD está inscrito en una circunferencia. Un punto E esta sobre la circunferencia. Si AB = 8, buscar el valor de $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2$.
7. Sea C el circuncírculo del triángulo ABC. Tracemos la bisectriz l del ángulo A. Sean L el punto de intersección de l con BC y N el otro punto de intersección de l con C. sea M el punto de intersección de la circunferencia que pasa por A, B y L con el segmento AC. Demuestra que las áreas de los triángulos BNM y BMC son iguales.
8. Dos circunferencias que se cortan en M y N tienen una tangente común que es tangente a una circunferencia en P y a la otra en Q. demuestra que los triángulos MNP y MNQ tienen la misma área.
9. **[Teorema de Van Aubel]** Sea ABC un triángulo y P, Q y R puntos sobre los lados AB, AC y CB respectivamente, tales que AR, BQ y AP concurren en un punto O. Demuestra que

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QC} = \frac{AO}{OR}$$

10. Supóngase que las circunferencias de radios distintos C_1 y C_2 se cortan en dos puntos A y B. Las tangentes a estas circunferencias trazadas por A intersecan a C_1 y C_2 en los puntos P y Q respectivamente. Prolongar los segmentos PB y QB hasta intersectar a C_2 y C_1 en M y N, respectivamente. Demuestra que el segmento PM tiene la misma longitud que el segmento QN.

11. Sea ABCD un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos talque el ángulo CMD es recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo AKB es recto y que

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1$$

12. Sea ABC un triangulo y P, Q, R, los puntos de tangencia con la circunferencia inscrita con AC, AB, y BC respectivamente. En R se traza una circunferencia tangente interna a la circunferencia inscrita, Desde B y C se trazan tangentes a ésta circunferencia, a los puntos de tangencia llamémosles X e Y respectivamente. Demostrar que PQXY es cuadrilátero cíclico.

Tarea: entregar el jueves 5 de junio del 2008, escrito (claramente con pluma) en hojas aparte.

1. Considere dos circunferencias tangentes exteriormente y de radios distintos; sus tangentes comunes forman un triángulo. Calcule el área de dicho triángulo en términos de los radios de las circunferencias.
2. Considere dos puntos fijos B y C de una circunferencia \mathcal{C} . Encuentre el lugar geométrico de las intersecciones de las bisectrices de los triángulos ABC , cuando A es un punto que recorre \mathcal{C} .
3. Calcule el volumen del octaedro que circunscribe a una esfera de radio uno.