



# XXII Olimpiada de Matemáticas, Yucatán 2008

## Primer Material de Entrenamiento, Geometría

Entrenador: *Tony*

Jueves 22 de Mayo del 2008



*Estos son algunos Teoremas, Criterios, Lemas, Proposiciones, Definiciones, etc. de Geometría que te servirán al resolver problemas.*

### **Congruencia de triángulos:**

Los Triángulos ABC y A'B'C' son congruentes si tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales.

### **Criterios De Congruencia:**

Dos triángulos son congruentes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

1. **(LAL)** Tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales.
2. **(ALA)** Tienen dos ángulos y el lado comprendido entre ellos iguales.
3. **(LLL)** Tienen tres lados iguales.

### **Teoremas:**

1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ .
2. En cualquier triángulo ABC tenemos que el ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.
3. En un triángulo, al lado mayor de cualesquiera dos lados se opone el ángulo mayor, es decir, si  $AB > AC$  entonces  $\angle ACB > \angle ABC$ . El recíproco es también válido, es decir, el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.

### **La Desigualdad Del Triángulo:**

Para cualquier triángulo tenemos que la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado. Es decir, si llamamos  $a$ ,  $b$  y  $c$  a las longitudes de los lados del triángulo, tenemos que las siguientes tres desigualdades se cumplen:

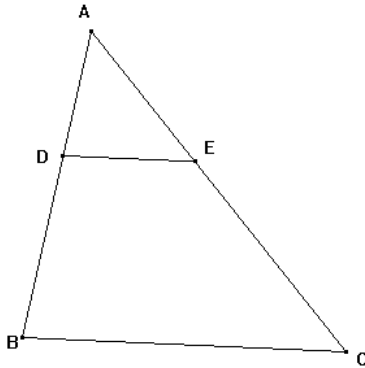
$$a + b > c$$

$$b + c > a$$

$$c + a > b.$$

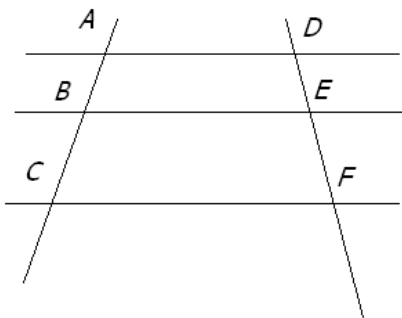
**Teorema.** Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números positivos tales que  $a + b > c$ ,  $a + c > b$  y  $c + b > a$ , entonces existe un triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

## Primer Teorema De Thales



En el triángulo ABC, sean D y E puntos de AB y AC respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ .

## Segundo Teorema De Thales:



Consideremos tres rectas y dos transversales a estas como se muestra en la figura. Tenemos que si AD, BE y CF son paralelas entonces  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ . Recíprocamente, si  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$  y dos de las rectas AD, BE o CF son paralelas entonces las tres rectas son paralelas.

## Semejanza de triángulos

Diremos que dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'.$$

Y sus lados homólogos son proporcionales, esto es,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

## Criterios De semejanza:

Dos triángulos son semejantes si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. **(LLL)** Tienen sus lados correspondientes proporcionales.
2. **(LAL)** Tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
3. **(AA)** Tienen dos ángulos correspondientes iguales.

## Teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Recíprocamente si en un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.

## Lemas:

1. En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es la media proporcional de los dos segmentos en que se divide la hipotenusa por el pie de tal altura. Recíprocamente sea ABC un triángulo, con ángulos en B y C menores a  $90^\circ$ , y sea D el pie de la altura de A sobre BC. Si  $AD^2 = BD \cdot DC$  entonces ABC es triángulo rectángulo.
2. Si ABC es un triángulo y AD es perpendicular a BC, se tiene que:  $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$
3. La altura por A es el conjunto de puntos P tales que:  $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$ .

## Problemas:

1. **[Ley del paralelogramo]** Demuestra que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados, es decir, si  $d_1$  y  $d_2$  son las diagonales y  $a$  y  $b$  los lados, entonces tenemos que:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 .$$

2. En el triángulo rectángulo ABC, CF es la mediana sobre la hipotenusa AB, CE es la bisectriz del  $\angle ACB$ , y CD es la altura hacia AB. Probar que  $\angle DCE = \angle ECF$ .
3. Si, en el triángulo ABC, la mediana AM es tal que  $\angle BAC$  es dividido en la razón 1:2, y AM es prolongada hasta un punto D tal que  $\angle DBA$  es recto, probar que  $AC = \frac{1}{2}AD$ .
4. En el cuadrado ABCD, M es el punto medio de AB. Una línea perpendicular a MC en M intersecta AD en K. Probar que  $\angle BCM = \angle KCM$ .
5. En cualquier triángulo ABC, con D, E y F los puntos medios de AC, AB y BC, respectivamente. BG es una altura del triángulo ABC. Probar que  $\angle EGF = \angle EDF$ .
6. Probar que la suma de las medidas de las perpendiculares desde cualquier punto en un lado de un rectángulo a las diagonales es constante.
7. Sean BE y AD alturas del triángulo ABC. F, G y K los puntos medios de AH, AB y BC, respectivamente. Probar que  $\angle FGK = 90^\circ$ .

8. En un paralelogramo ABCD, M es el punto medio de BC. DT es trazado desde D perpendicular a MA. Probar que  $CT = CD$ .
9. Probar que el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de cualquier cuadrilátero biseca el segmento que une los puntos medios de las diagonales.
10. Sea ABCD un paralelogramo con triángulos equiláteros ABF y ADE dibujados sobre los lados AB y AD, respectivamente. Probar que el triángulo FCE es equilátero.
11. Si un cuadrado es dibujado externamente en cada lado de un paralelogramo, probar que:
  - a) El cuadrilátero, determinado por los centros de estos cuadrados, es también un cuadrado.
  - b) Las diagonales de este nuevo cuadrado formado son concurrentes con las diagonales del paralelogramo original.
12. En el paralelogramo ABCD, puntos E y F son tomados en la diagonal AC tal que  $AE = FC$ . Si BE es prolongado hasta intersectar a AD en H, y BF es prolongado hasta intersectar a DC en G, probar que  $HG \parallel AC$ .

**Tarea:** entregar el jueves 29 de mayo del 2008, escrito (claramente con pluma) en hojas aparte.

1. Considere dos rectas  $l$  y  $l'$  y un punto fijo P que diste lo mismo de  $l$ , que de  $l'$ . ¿Qué lugar geométrico describen los puntos M que son proyección de P sobre AB, donde A está en  $l$ , B está en  $l'$ , y el ángulo APB es recto?
2. Considere un triángulo rectángulo ABC donde la hipotenusa es BC. M un punto en BC y P y Q las proyecciones de M en AB y AC respectivamente. Pruebe que para ninguno de tales puntos M son iguales las áreas del triángulo BPM, del triángulo MQC y el rectángulo AQMP (las tres al mismo tiempo).
3. Tres rectas en el espacio  $l, m, n$  concurren en el punto S.
  - a) un plano perpendicular a  $m$  corta a  $l, m, n$  en A, B y C respectivamente. Suponga que los ángulos ASB y BSC son de  $45^\circ$  y que el ángulo ABC es recto. Calcule el ángulo ASC.
  - b) Si un plano perpendicular a  $l$  corta a  $l, m, n$  en P, Q y R respectivamente y si  $SP = 1$ , calcule los lados del triángulo PQR. (Nota: las condiciones del a) también se cumplen aquí)