

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES

Organisée par

l'ACADÉMIE DE VERSAILLES

l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Vacances d'Hiver 2007

1) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1996) On se donne un nombre de 3 chiffres abc vérifiant $49a + 7b + c = 286$. Calculer le nombre $190a + 10b + c$.

2) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1996) Trouver le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $n^3 + 2n$ soit le carré d'un entier impair.

3) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1997) On se donne un nombre de 3 chiffres distincts abc . On choisit 2 chiffres parmi ces 3 chiffres et on fabrique 6 nombres. On ajoute ces 6 nombres et on trouve 484. Quelles sont les possibilités pour le nombre abc ?

4) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1997) Résoudre le système $x - \sqrt{yz} = 42 \quad y - \sqrt{xz} = 6 \quad z - \sqrt{xy} = -30$.

5) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1999) Pour un nombre x on définit $[x]$ comme étant la partie entière de x . Déterminer sans calculatrice la somme $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{47}] + [\sqrt{48}] + [\sqrt{49}] + [\sqrt{50}]$.

6) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1999) Si $bd + cd$ est un entier impair montrer qu'on ne peut pas écrire $x^3 + bx^2 + cx + d$ sous la forme $(x+r)(x^2 + px + q)$ avec b, c, d, r, p entiers.

7) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1999) Trouver le plus petit positif k tel que $\frac{14k+17}{k-9}$ s'écrive sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et $q \neq 1$ premiers entre eux.

8) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2000) Trouver l'entier positif n tel que $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ où $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$.

9) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2000) Trouver tous les nombres de 5 chiffres tels que le produit des chiffres soit égal à 2000.

10) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2000) La suite de nombres $\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3$ est définie par $a_n - (n+1)a_{2-n} = (n+3)^2$ pour tous les entiers n . Calculer a_0 .

11) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2001) Si $f(x) = x^2 + 6x + c$ avec c entier montrer que $f(0) + f(-1)$ est impair. Soit $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ avec p, q, r entiers. Si $g(0)$ et $g(-1)$ sont impairs montrer que l'équation $g(x) = 0$ ne peut pas avoir 3 racines entières.

12) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2001) Si a est un entier positif et si $2x + a = y \quad a + y = x \quad x + y = z$, déterminer la valeur maximale de $x + y + z$.

13) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2002) Si $x+y = 4$ et $xy = -12$ calculer $x^2 + 5xy + y^2$.