

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
Organisée par
L'ACADÉMIE DE VERSAILLES
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD
et **L'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES**

=====

Samedi 31 Mars 2007

Zvonkine

Vingt-Huitième Tournoi des Villes

Printemps 2007

Épreuve normale, quatrième-troisième-seconde

1) Dans le plan, on trace sans lever le crayon une étoile à cinq branches, divisée en cinq triangles et un pentagone. Il s'avère que les cinq triangles sont isométriques. Est-ce que cela implique nécessairement que le pentagone est régulier (c'est-à-dire que ses côtés sont tous de même longueur et ses angles sont tous égaux)?

2) Deux nombres à 2007 chiffres sont écrits au tableau. On sait qu'il est possible d'effacer 7 chiffres de chaque nombre de façon à obtenir deux nombres égaux. Montrer qu'il est alors aussi possible d'insérer 7 chiffres dans chaque nombre pour obtenir deux nombres égaux.

3) Quel est le plus petit nombre de tours qu'il faut mettre sur un échiquier 8×8 pour que chaque case blanche soit menacée par au moins une tour? (Une tour menace toutes les cases de la ligne et de la colonne dans lesquelles elle se trouve, y compris sa propre case).

4) Trois réels non nuls a, b et c sont donnés. On considère les six équations du second degré ayant comme coefficients a, b et c ($ax^2 + bx + c = 0, bx^2 + cx + a = 0, \dots$). On sait que chacune de ces équations a au moins une solution réelle. Est-ce que cela implique que chacune de ces équations a nécessairement au moins une solution positive?

5) a) Un gâteau triangulaire a l'un de ses angles qui est trois fois plus grand que l'un des deux autres. La boîte de ce gâteau, suite à une erreur de fabrication, a la forme du gâteau retourné. Montrer qu'on peut couper le gâteau en deux morceaux et les mettre dans la boîte sans les retourner. b) Même question pour un gâteau ayant la forme d'un triangle ayant un angle obtus deux fois plus grand que l'un des deux autres angles. (Le gâteau et la boîte sont considérés comme des figures planes.)

=====

Samedi 5 Mai 2007

Santharoubane

1) (Ecole Normale Supérieure Ulm, Oral)

a) Pour quelles partitions de n sous la forme $n = a_1 + \dots + a_k$ (avec $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k$), le produit $a_1 \dots a_k$ est-il maximal?

b) Résoudre le même problème si on considère seulement les partitions constituées d'entiers 2 à 2 distincts.

2) (Olympiades Académiques de Mathématiques de Quatrième, France 2006) Un escargot se promène dans un jardin de forme rectangulaire $ABCD$ entouré d'un mur. Une maisonnette $RMND$ en occupe un coin avec R sur AD et N sur CD . L'unité de longueur est le mètre. On donne $AB = 13$, $BC = 9$, $MN = 3$, $DN = 5$. Soit E le point de AD tel que $AE = 4, 5$.

L'escargot part du point E et se déplace en ligne droite. Il atteint le mur AB en F , point de AB tel que $EF = 7, 5$. Il poursuit son chemin comme si sa trajectoire se réfléchissait sur l'obstacle (les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{BFG}$ sont égaux). Il rebondit de même sur BC en un point G puis sur NC en un point H avant d'atteindre MN en un point P .

a) Faire une figure et coder les angles de même mesure.

b) Déterminer la distance PN .

c) Les points H, P et E sont-ils alignés?

3) (Ecole Polytechnique, Oral) Déterminer le nombre a_n de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces 1×2 . Montrer que a_n est la partie entière de $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$, si n est assez grand.