

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES

Organisée par

l'ACADÉMIE DE VERSAILLES

l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

1) (Olympiades Mathématiques Régionales, Balkan Junior 1997) On se donne des nombres x, y, k tels que $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = k$. Calculer $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ en fonction de k .

2) (Olympiades Mathématiques Régionales, Balkan Junior 1999) Soient 3 réels distincts a, b, c tels que $a^3 + pa + q = 0$ $b^3 + pb + q = 0$ $c^3 + pc + q = 0$ avec p, q réels. Montrer que $a + b + c = 0$.

3) (Olympiades Mathématiques Régionales, Balkan Junior 2001) Trouver tous les entiers positifs a, b, c tels que $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

4) (Olympiades Mathématiques Régionales, Balkan Junior 2003) Soit $A = 44\dots4$ (avec $2n$ chiffres) et $B = 88\dots8$ (avec n chiffres). Montrer que $A + 2B + 4$ est un carré parfait.

5) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2002) La somme des n premiers termes d'une suite de nombres est égal à $5n^2 + 6n$. Calculer la somme des 3e 4e et 5e termes.

6) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2002) Trouver a, b pour que le produit des nombres de 3 chiffres $2a5$ et $13b$ soit divisible par 36. Si 7 divise $10m + n$ montrer que 7 divise $m - 2n$. Si 7 divise $5c + 4d$ montrer que 7 divise $4c - d$.

7) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2003) Trouver tous les réels x tels que $\left[\frac{3}{x}\right] + \left[\frac{4}{x}\right] = 5$.

8) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2003) Trouver tous les entiers positifs k, l, m tels que $k + l + m = 97$ $\frac{4k}{5} + \frac{5l}{6} + \frac{6m}{7} = 82$.

9) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2003) Soient a, b, c les racines de $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$. Calculer $a^5 + b^5 + c^5$.

10) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2005) Trouver tous les réels x, y, z tels que $x^2 - yz + xy + zx = 82$ $y^2 - zx + xy + yz = -18$ $z^2 - xy + zx + yz = 18$.

11) (Olympiades Académiques de Quatrième, France 2006) Quel est le nombre de chiffres du nombre $N = 10^{2006} - 2006$? Quelle est la somme des chiffres de N ?

12) (Olympiades Académiques de Première, France 2004) Un entier $n \geq 2$ est dit académique si on peut répartir les entiers $1, 2, \dots, n$ en deux groupes disjoints S et P , de sorte que la somme des nombres du groupe S soit égale au produit des nombres du groupe P . Exemple: le nombre 7 est académique car $2 + 4 + 5 + 7 = 1 \times 3 \times 6$. Prouver que 4 est académique. Les nombres 5 et 6 sont-ils académiques? Montrer que tout $n \geq 7$ est académique.

13) (Olympiades Mathématiques Régionales, Suède 1964) Trouver tous les entiers positifs m, n tels que $n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + m) = 1000$.