

**PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES**  
 Organisée par  
**l'ACADÉMIE DE VERSAILLES**  
**l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD**  
**et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES**

=====

**Samedi 17 Mars 2007**

**Santharoubane**

1) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1999) Trouver le plus petit entier positif  $k$  tel que  $14k + 17 = pd$  et  $k - 9 = qd$  où  $q \neq 1$   $d \neq 1$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux.

**Lo Jacomo**

2) Soit  $ABCD$  un carré de côté  $a$ . On trace à l'intérieur du carré les demi-cercles de diamètre  $CD$  et  $BD$  qui se coupent en  $O$ . Calculer la surface définie par la réunion des demi-cercles à laquelle on enlève leur intersection.

3) On trace un cercle  $\mathcal{C}_1$  de centre  $A$  et de rayon  $R$ . Soit  $BC$  un diamètre. On trace les 2 cercles  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  de diamètre  $AB$  et  $AC$  puis un cercle  $\mathcal{C}_4$  de centre  $D$  tangent à  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  et enfin un cercle  $\mathcal{C}_5$  de centre  $E$  tangent à  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ . Montrer que  $ADEF$  est un rectangle où  $F$  est le milieu de  $AC$ .

4) Soient  $D$  et  $D'$  deux droites non parallèles. On trace 5 cercles tangents 2 par 2 et tangents à ces droites. Le 1er cercle a pour rayon 12, le 5ème cercle a pour rayon 27. Calculer le rayon du 3ème cercle.

5) Soit  $ABC$  un triangle équilatéral et  $M$  un point quelconque à l'extérieur du triangle. Montrer que  $AM \leq BM + CM$ .

=====

**Samedi 24 Mars 2007**

**Santharoubane**

1) (Olympiades Mathématiques Régionales, Balkan Junior 1997) On se donne des nombres  $x, y, k$  tels que  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = k$ . Calculer  $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$  en fonction de  $k$ .

2) (Olympiades Mathématiques Régionales, Balkan Junior 1999) Soient 3 réels distincts  $a, b, c$  tels que  $a^3 + pa + q = 0$   $b^3 + pb + q = 0$   $c^3 + pc + q = 0$  avec  $p, q$  réels. Montrer que  $a + b + c = 0$ .

3) (Olympiades Mathématiques Régionales, Balkan Junior 2001) Trouver tous les entiers positifs  $a, b, c$  tels que  $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$ .

4) (Olympiades Académiques de Mathématiques de Quatrième, France 2006) Quel est le nombre de chiffres du nombre  $N = 10^{2006} - 2006$ ? Quelle est la somme des chiffres de  $N$ ?

5) (Olympiades Académiques de Mathématiques de Quatrième, France 2006) On s'intéresse aux diverses façons d'écrire un nombre entier naturel comme somme d'autres nombres entiers naturels (pour éviter les répétitions, ils sont écrits dans l'ordre croissant). Par exemple:  $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 4 = 2 + 3$  sont les 6 décompositions possibles du nombre 5. À chacune des sommes ainsi écrites, on associe le produit de ses termes. Les résultats obtenus pour 5 sont 1, 2, 3, 4 et 6.

a) Quelles sont les décompositions possibles du nombre 7? Quels sont les produits correspondants? Lequel est le plus grand?

b) On s'intéresse à présent aux décompositions du nombre 28, qu'on ne cherchera pas à écrire, et aux produits correspondants.

$\alpha$ ) On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparaît le nombre 1. On appelle  $P$  le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à  $P$ .

$\beta$ ) On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparaît le nombre 5. On appelle  $R$  le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à  $R$ .

$\gamma$ ) Quelles décompositions de 28 donnent le plus grand produit associé?

6) (Concours Commun Mines, Ponts et Chaussées, Oral 1990) Soient  $n \in \mathbb{N}^*, N$  le nombre de diviseurs de  $n$  et  $P$  le produit de ces diviseurs. Donner une relation entre  $n, N, P$ .

7) (Concours Commun Mines, Ponts et Chaussées, Oral 1993) Soient  $a$  et  $r$  des entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que, si  $a^r - 1$  est premier, alors  $r$  est premier et  $a = 2$ .