

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
Organisée par

L'ACADÉMIE DE VERSAILLES
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD CENTRE D'ORSAY
et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

=====

Samedi 10 Février 2007 14h-17h

Santharoubane

- 1) (Olympiades Mathématiques Internationales 1977) Trouver $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $q^2 + r = 1977$ où q et r sont le quotient et le reste de la division de $a^2 + b^2$ par $a + b$.
- 2) (Olympiades Mathématiques Nationales, Canada 2005) Soient a, b, c des entiers positifs tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Montrer que $(\frac{c}{a} + \frac{c}{b})^2$ n'est pas un entier.
- 3) (Olympiades Mathématiques Nationales, URSS 1997) Est-il possible de trouver des réels b, c tels que chacune des équations $x^2 + bx + c = 0$ $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ aient deux racines entières

=====

Samedi 10 Mars 2007 14h-17h

Santharoubane

- 1) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1996) On se donne un nombre de 3 chiffres abc vérifiant $49a + 7b + c = 286$. Calculer le nombre $190a + 10b + c$.
- 2) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1996) Trouver le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $n^3 + 2n^2$ soit le carré d'un entier impair.
- 3) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1997) On se donne un nombre de 3 chiffres distincts abc . On choisit 2 chiffres parmi ces 3 chiffres et on fabrique 6 nombres. On ajoute ces 6 nombres et on trouve 484. Quelles sont les possibilités pour le nombre abc ?
- 4) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1997) Résoudre le système $x - \sqrt{yz} = 42$ $y - \sqrt{xz} = 6$ $z - \sqrt{xy} = -30$.
- 5) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 1999) Si $bd + cd$ est un entier impair montrer qu'on ne peut pas écrire $x^3 + bx^2 + cx + d$ sous la forme $(x+r)(x^2 + px + q)$ avec b, c, d, r, p entiers.
- 6) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2000) Pour un nombre x on définit $[x]$ comme étant la partie entière de x . Déterminer sans calculatrice la somme $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{47}] + [\sqrt{48}] + [\sqrt{49}] + [\sqrt{50}]$.
- 6') Calculer la somme $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{n}]$ en fonction de n .
- 7) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2000) Trouver l'entier positif n tel que $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.
- 8) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2000) Trouver tous les nombres de 5 chiffres tels que le produit des chiffres soit égal à 2000.
- 9) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2000) La suite de nombres $\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3$ est définie par $a_n - (n+1)a_{2-n} = (n+3)^2$ pour tous les entiers n . Calculer a_0 .
- 10) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2001) Si a est un entier positif et si $2x + a = y$ $a + y = x$ $x + y = z$, déterminer la valeur maximale de $x + y + z$.
- 11) (Olympiades Mathématiques Régionales, Canada 2002) Si $x + y = 4$ et $xy = -12$ calculer $x^2 + 5xy + y^2$.