

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES

Organisée par

l'ACADÉMIE DE VERSAILLES

l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Samedi 2 Juin 2007 14h-17h

Louis Santharoubane

60) (Agrégation de Mathématiques, Concours Interne Ecrit 2007, Extrait)

L'objectif de ce problème est d'étudier les solutions entières de l'équation de Fermat

$$a^n + b^n = c^n \quad n = 2, 3, 4$$

Partie I: L'équation $a^2 + b^2 = c^2$

1) Soit $M = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On suppose que l'on a $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0, y \geq 0$. Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ le nombre réel tel que $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$. On pose $t = \tan(\frac{\theta}{2})$.

a) Exprimer x et y en fonction de t . En déduire que, si t est un nombre rationnel, x et y sont aussi des nombres rationnels.

b) Inversement, démontrer que, si x et y sont des nombres rationnels, t est aussi un nombre rationnel.

2) Soient a, b, c des nombres entiers > 0 et tels que $a^2 + b^2 = c^2$. On pose $x = a/c$, $y = b/c$; les nombres x et y sont rationnels et satisfont à l'égalité $x^2 + y^2 = 1$. Soit t le nombre défini dans la question (I.1). Le nombre t est rationnel et l'on a $0 < t < 1$.

a) On pose $t = v/u$, où u et v sont des nombres entiers positifs, premiers entre eux. Exprimer a/c et b/c en fonction de u et v .

b) Supposons que u et v aient des parités différentes. Démontrer que les nombres $2uv$, $u^2 + v^2$, $u^2 - v^2$ sont premiers entre eux deux à deux.

c) En déduire qu'il existe dans ce cas un entier w tel que $a = (u^2 - v^2)w$, $b = 2uvw$, $c = (u^2 + v^2)w$.

d) Supposons maintenant que les nombres u et v soient tous deux impairs. Démontrer qu'il existe alors un entier w tel que $a = \frac{u^2 - v^2}{2}w$, $b = 2uvw$, $c = \frac{u^2 + v^2}{2}w$.

e) En déduire qu'il existe dans ce cas des entiers u' et v' , premiers entre eux et de parités distinctes, tels que l'on ait $a = 2u'v'w$, $b = (u'^2 - v'^2)w$, $c = (u'^2 + v'^2)w$.

3) Soient a, b, c des nombres entiers > 0 et tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Démontrer que si les nombres a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble, ils sont premiers entre eux deux à deux.

b) Supposons que dans la suite que a et b sont premiers entre eux. Démontrer que a et b ne peuvent avoir la même parité. [On pourra remarquer que, si n est un entier impair, alors $n^2 \equiv 1(4)$.

c) Supposons toujours a et b sont premiers entre eux et supposons que b est pair. Démontrer qu'il existe des nombres entiers u et v strictement positifs, premiers entre eux et de parités distinctes, satisfaisant aux relations $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$.

4) Dans cette question, on suppose donnés trois nombres entiers a, b, c strictement positifs, premiers entre eux deux à deux tels que $a^4 + b^4 = c^2$. Compte tenu de la question précédente, a et b ont des parités distinctes. De plus, en supposant que b est pair, il existe des nombres entiers u et v , strictement positifs, premiers entre eux et de parités distinctes, tels que $a^2 = u^2 - v^2$, $b^2 = 2uv$, $c = u^2 + v^2$.

a) Démontrer que v est pair.

b) Démontrer l'existence de deux entiers x et y , strictement positifs, premiers entre eux, tels que $u = x^2$ et $v = 2y^2$.

c) Etablir la relation $a^2 + (2y^2)^2 = x^4$. En déduire l'existence de deux nombres entiers s et t strictement positifs, premiers entre eux, tels que $y^2 = st$ et $x^2 = s^2 + t^2$.

d) Démontrer que s et t sont les carrés de nombres entiers > 0 , $s = m^2, t = n^2$.

e) Vérifier que l'on a $m^4 + n^4 = x^2$ et $0 < x < c$.

f) En utilisant les résultats précédents, donner une preuve de l'impossibilité de trouver trois nombres entiers a, b, c strictement positifs, tels que $a^4 + b^4 = c^2$.