

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES

Organisée par

l'ACADÉMIE DE VERSAILLES

l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Samedi 26 Mai 2007 14h-17h

Louis Santharoubane

59) (Ecoles Normales Supérieures Paris Lyon Cachan, MP, Ecrit 2007, Extrait)

Partie II Somme de quatre carrés

Dans cette partie on s'intéresse au cas $d = 2$ et $m = 4$.

1) Soit p un nombre premier impair.

a) Déterminer l'ensemble $\{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times; \quad x^2 = 1\}$.

b) En déduire le cardinal des ensembles $\{x^2; x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\}$ et $\{x^2; x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.

c) Montrer que les ensembles $\{x^2; x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ et $\{-1 - y^2; y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.

d) Montrer qu'il existe $x, y, m \in \mathbb{N}$ avec $0 < m < p$ tels que $1 + x^2 + y^2 = mp$.

Dans le reste de cette partie, on note

$$\mathcal{N}_2^4 = \{t \in \mathbb{N} \mid \exists (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4, \quad t = \sum_{i=1}^4 x_i^2\}$$

3) Montrer que $\forall a, b \in \mathcal{N}_2^4 \quad ab \in \mathcal{N}_2^4$

4) Soit p un nombre premier impair.

a) Montrer qu'il existe $m \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que mp appartienne à $\mathcal{N}_2^4$.

On note m_0 le plus petit entier strictement positif tel que $m_0 p \in \mathcal{N}_2^4$.

b) Soit m un entier pair tel qu'il existe $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ avec $mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

(i) Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathcal{S}_4$ telle que les entiers

$$x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} \quad x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)} \quad x_{\sigma(3)} + x_{\sigma(4)} \quad x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}$$

soient tous les quatre pairs et positifs.

(ii) En déduire que $\frac{mp}{2}$ appartient à $\mathcal{N}_2^4$.

c) Montrer que m_0 est impair.

d) On suppose que $m_0 \neq 1$. On se donne $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ tels que $m_0 p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

(i) Montrer qu'il existe des entiers b_1, b_2, b_3 et b_4 tels que les entiers donnés par $y_i = x_i - b_i m_0$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ satisfassent les trois conditions suivantes:
 $|y_i| < \frac{1}{2} m_0$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ $0 < y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 < m_0^2$ et $0 < y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv 0$ modulo m_0 . On note $m_1 = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)/m_0$.

(ii) On admettra qu'il existe $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{N}^4$ tels que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = m_0^2 m_1 p$ et $z_i \equiv 0$ modulo m_0 pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

e) Montrer que $m_0 = 1$.

4) Montrer que $\mathbb{N} = \mathcal{N}_2^4$.