

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES

Organisée par

l'ACADÉMIE DE VERSAILLES

l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Samedi 19 Mai 2007

Santharoubane

1) (Ecoles Normales Supérieures Paris Lyon Cachan, MP, Ecrit 2007, Extrait)

Objectif

Ce problème est consacré à l'étude des solutions entières d'équations de la forme

$$X_1^d + \dots + X_m^d = t$$

où d et m sont des entiers strictement positifs et t un entier positif ou nul.

Partie I

Étude de cas particuliers

1) Soient m un entier strictement positif et t un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = t\}$ est fini. On note dans la suite $N_1^m(t)$ son cardinal.

b) Montrer qu'on a la relation $N_1^m(t) = \sum_{k=0}^t N_1^{m-1}(k)$ pour tout entier $m \geq 2$ et tout t de $\mathbb{N}$.

c) Montrer la formule $N_1^m(t) = \binom{t+m-1}{m-1}$ pour tout m de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $\mathbb{N}$.

2) On s'intéresse maintenant au cas où $d = 2$ et $m = 3$.

a) Déterminer l'image des applications

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \quad x \mapsto x^2 \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \quad x \mapsto x^2$$

b) Donner l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0$ dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^3$.

c) Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 8b - 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}^3$.

d) Soient b un entier strictement positif et a un entier positif ou nul. Montrer que l'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 4^a(8b - 1)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^3$.

Partie II

Somme de quatre carrés

Dans cette partie on s'intéresse au cas $d = 2$ et $m = 4$.

1) Soit p un nombre premier impair.

a) Déterminer l'ensemble $\{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times; \quad x^2 = 1\}$.

b) En déduire le cardinal des ensembles $\{x^2; x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\}$ et $\{x^2; x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.

c) Montrer que les ensembles $\{x^2; x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ et $\{-1 - y^2; y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.

d) Montrer qu'il existe des entiers positifs ou nuls x, y et m avec $0 < m < p$ tels que $1 + x^2 + y^2 = mp$.