

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
Organisée par
L'ACADÉMIE DE VERSAILLES
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD
et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

=====

Samedi 12 Mai 2007

Lo Jacomo

1) ABC est un triangle rectangle en A , AD une hauteur (D appartient à $[BC]$). E est le milieu de $[DC]$, B le milieu de $[AF]$. Démontrer que les droites (AE) et (FD) sont perpendiculaires.

2) Soient ABC un triangle, D la projection orthogonale de C sur la bissectrice de l'angle A , E la projection orthogonale de C sur la bissectrice de l'angle B . Démontrer que (DE) est parallèle à (AB) .

3) Soient ABC un triangle équilatéral, M un point intérieur au triangle, D, E, F les projections orthogonales de M sur $(BC), (CA), (AB)$ respectivement. Déterminer le lieu des points M pour lesquels l'angle DEF est droit.

4) Soit ABC un triangle rectangle en C . On construit trois carrés $ACKJ, BCGI$ et $ABED$ extérieurs au triangle.

a) montrer que $BJ = DC$ et $AI = CE$.

b) (BJ) coupe (AC) en X et (AI) coupe (BC) en Y . Montrer que $CX = CY$.

5) Soit P un point de la diagonale $[BD]$ d'un rectangle $ABCD$. On note F le projeté de P sur $[BC]$. Soit H sur le segment $[BC]$ tel que $FB = FH$. On appelle Q le point d'intersection de (PC) et (AH) . Montrer que les triangles APQ et CHQ ont même aire.

6) (Olympiades Mathématiques Régionales, Balkan Junior 1997) Soient I le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC , M et N les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Les droites (BI) et (CI) coupent (MN) en K et L . Montrer que $AI + BI + CI > BC + KL$.