

PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
 Organisée par
L'ACADÉMIE DE VERSAILLES
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD CENTRE D'ORSAY
 et **L'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES**

=====

Samedi 20 Janvier 2007 14h-17h

Deschamps

1) Sur une feuille quadrillée on écrit les chiffres 1,2,...,9 en spirale en partant du centre. Trouver le chiffre placée sur la 100ème ligne au-dessus de 1.

Yebbou

2) (Olympiades Mathématiques Nationales, Slovénie 2004) Trouver tous les entiers $m, n \geq 1$ tels que $\frac{3}{m} + \frac{5}{n} = 1$.

3) Soient 2 droites parallèles D et D' et 2 points A et B situés de part et d'autre des droites. Trouver $P \in D$ et $P' \in D'$ tels que la longueur de $APP'B$ soit minimale sachant que PP' est perpendiculaire à D et à D' .

Santharoubane

4) (Olympiades Mathématiques Internationales 1968) On note $[x]$ la partie entière de x . Calculer la somme $[\frac{n+2^0}{2^1}] + [\frac{n+2^1}{2^2}] + [\frac{n+2^2}{2^3}] + [\frac{n+2^3}{2^4}] + \dots$

=====

Samedi 27 Janvier 2007 14h-17h

Santharoubane

1) (Olympiades Mathématiques Nationales, Slovénie 2004, Variations) On se donne des entiers $a, b, c \geq 1$. Trouver tous les entiers $m, n \geq 1$ tels que $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = 1$. Trouver tous les entiers $m, n \geq 1$ tels que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{c}$.

2) (Olympiades Mathématiques Nationales, Slovénie 2005) Trouver le plus petit entier $n \geq 1$ tel que la somme $n + 2n + 3n + \dots + 9n$ soit un nombre dont l'écriture décimale ait tous ses chiffres égaux.

3) (Olympiades Mathématiques Nationales, Allemagne 1997) Soient x, y, z des réels tels que $x^3 = 2y - 1$ $y^3 = 2z - 1$ $z^3 = 2x - 1$. Montrer que $x = y = z$.

Lo Jacomo

4) (Olympiades Mathématiques Nationales, Croatie 2006) Trouver tous les entiers n tels que $\frac{5n-23}{n-7}$ soit un entier.

5) (Olympiades Mathématiques Internationales 1959) Montrer que pour tout entier n , la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

6) (Olympiades Mathématiques Nationales, Canada 1996) Résoudre le système $\frac{4x^2}{1+4x^2} = y$ $\frac{4y^2}{1+4y^2} = z$ $\frac{4z^2}{1+4z^2} = x$.

=====

Samedi 03 Février 2007 14h-17h

Santharoubane

1) (Olympiades Mathématiques Nationales, Croatie 2005) Si a, b, c sont tels que $a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$ alors $abc = 0$.

2) (Olympiades Mathématiques Nationales, Minsk 2005) Soit un nombre de 3 chiffres (deux à deux différents et sans zéro); on modifie l'ordre des 3 chiffres de telle sorte qu'aucun d'eux n'occupe la même place. On retranche le second du premier et le résultat est un nombre à deux chiffres qui est un carré parfait. Quels sont les résultats possibles?

3) (Olympiades Mathématiques Nationales, Espagne 1996) Les entiers naturels a, b sont tels que $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ soit un entier. Soit d le plus grand commun diviseur de a et de b . Montrer que $d \leq \sqrt{a+b}$.

4) (Olympiades Mathématiques Régionales, Inde 2005) Si 3 nombres a, b, c vérifiant $|a-b| \geq |c|$ $|b-c| \geq |a|$ $|c-a| \geq |b|$ alors l'un de ces nombres est somme des 2 autres.