

Préparation aux Olympides Mathématiques

Séance du Samedi 27 Janvier 2007

Eugénia Jeltikova

Exercice 4, feuille 1

Résoudre le système:

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

Première méthode

Rappelons tout d'abord que comme tout carré est un nombre positif ou nul, nous avons: $u^2 + v^2 - 2uv \geq 0$, d'où $2uv \leq u^2 + v^2$.

Nous pouvons ainsi étudier la première égalité:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y.$$

Ici, admettons les valeurs suivantes de u et v : $u = 1$, $v = 2x$. Soit : $1+4x^2 \geq 4x$.

De là, comme $x \geq 0$, nous obtenons:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} \leq \frac{4x^2}{4x} = x.$$

Et, puisque $\frac{4x^2}{1+4x^2} = y$, nous avons l'inégalité: $y \leq x$.

De la même façon on obtient: $z \leq y$, $x \leq z$. Donc on a

$$z \leq y \leq x \leq z,$$

ce qui implique:

$$x = y = z.$$

Par conséquent, le système d'origine se réduit à l'équation

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = x.$$

Transformons- la:

$$4x^2 = x(1+4x^2)$$

$$4x^2 = x + 4x^3$$

$$4x^3 - 4x^2 + x = 0$$

$$x(4x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$x(2x - 1)^2 = 0.$$

D'où, soit $x = \frac{1}{2}$, soit $x = 0$.

On peut en conclure que le système initial a deux solutions:

$$x = y = z = 0,$$

et

$$x = y = z = \frac{1}{2}.$$

Seconde méthode

Notons d'abord que si l'un de x, y, z est nul, alors les autres le sont aussi (il s'agit de la solution triviale: $x = y = z = 0$). Nous pouvons donc supposer pour la suite que $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Rappelons que, puisque tout carré est un nombre positif ou nul, une somme de carrés ne peut être nulle que si chacun des carrés qui la composent est nul.

Transformons la première égalité au travers des inverses:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y,$$

$$\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{4x^2}.$$

De même, nous obtenons:

$$\frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{4y^2},$$

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{4z^2}.$$

Nous pouvons en déduire:

$$\left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{y} + 1\right) + \left(\frac{1}{4y^2} - \frac{1}{z} + 1\right) + \left(\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{x} + 1\right) = 0.$$

Transformons l'égalité ci-dessus:

$$\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{4z^2} - \frac{1}{x} + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} + 1\right) + \left(\frac{1}{4y^2} - \frac{1}{y} + 1\right) + \left(\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{z} + 1\right) = 0.$$

Après avoir factorisé, nous obtenons:

$$\left(\frac{1}{2x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2y} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2z} - 1\right)^2 = 0.$$

D'où

$$\frac{1}{2x} - 1 = 0, \quad \frac{1}{2y} - 1 = 0, \quad \frac{1}{2z} - 1 = 0,$$
$$x = y = z = \frac{1}{2}.$$

L'on peut ainsi conclure que le système initial présente deux solutions:

$$x = y = z = 0$$

et

$$x = y = z = \frac{1}{2}.$$