VIII Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 1 (5^a e 6^a Séries)

20/10/2007

Instruções:

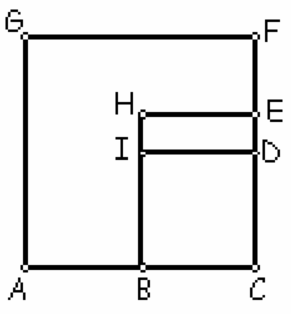
- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro ou compasso.
- Tudo que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas.
- Os nomes dos premiados (em ordem alfabética) serão divulgados dia 27 de outubro de 2007 no site oficial da olimpíada paraense de matemática: www.geocities.com/olimpmatpara e também na comunidade do orkut: "Olimpíada Paraense de Matemática"
- A cerimônia de premiação será realizada dia 30 de outubro, às 19:00 h, no auditório do Colégio Ideal Batista Campos. Somente nesta ocasião os alunos premiados descobrirão as medalhas conquistadas.

---

1) Todos os números inteiros ímpares desde 1 até 301 são escritos em uma folha de papel. Quantas vezes o dígito 3 é escrito?

2) Pablo mora no país da Moedolândia, onde não há cédulas de dinheiro, somente moedas. O nome da moeda neste país é pau e é representado por P$. As moedas neste país são dos seguintes valores: 1, 2, 5, 10, 20 e 50 centavos e também há moedas de P$ 1 e de P$ 2. Pablo precisa comprar um remédio na farmácia, mas não sabe exatamente o valor, apenas possui a informação que o preço é mais de P$ 1 e menos de P$ 3. Pablo sabe também que esta farmácia nunca tem troco para valores pagos que não sejam exatamente o preço do produto. Determine a menor quantidade de moedas que Pablo deve levar à farmácia para conseguir pagar exatamente o valor do remédio (sem troco).

3) Na figura, ACFG e BCDI são quadrados. AB = BC; EC = 2.FE; DEHI é um retângulo de 144 cm de perímetro. Qual é o perímetro de ACFG?



4) Rui foi sacar um cheque no banco. No cheque a quantidade de centavos era o triplo da quantidade valores inteiros em reais. O funcionário do caixa se equivocou ao pagar o valor do cheque. Ele pagou em valores inteiros de reais a quantidade que deveria pagar em centavos e pagou em centavos o que deveria pagar em valores inteiros de reais. Rui tomou o dinheiro, gastou R$ 14,25 e então se deu conta que tinha o dobro do que o caixa deveria ter dado a ele pelo cheque. Determine de quanto era o valor do cheque.

5) Um campeonato de futebol é disputado por 20 equipes. Durante o campeonato todas as equipes jogam entre si exatamente uma vez. Todos os jogos são realizados aos domingos, com cada time jogando exatamente uma vez por domingo. Ao conjunto destes 10 jogos realizados por domingo denominamos "rodada". Por cada vitória o time vencedor ganha 3 pontos e o time perdedor não ganha nenhum ponto. Em caso de empate, cada um dos times ganha um ponto. Um time é declarado "campeão por antecedência" se, ao término de uma determinada rodada (antes da última rodada) atingir um certo número de pontos que permita não mais ser alcançado por nenhum dos outros times do campeonato, por mais que perca todos os seus jogos restantes. Determine o menor valor possível de n, de modo que na rodada n um time do campeonato possa ser declarado campeão por antecedência.

VIII Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 2 (7ª e 8ª Séries)

20/10/2007

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro ou compasso.
- Tudo que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas.
- Os nomes dos premiados (em ordem alfabética) serão divulgados dia 27 de outubro de 2007 no site oficial da olimpíada paraense de matemática: www.geocities.com/olimpmatpara e também na comunidade do orkut: “Olimpíada Paraense de Matemática”
- A cerimônia de premiação será realizada dia 30 de outubro, às 19:00 h, no auditório do Colégio Ideal Batista Campos. Somente nesta ocasião os alunos premiados descobrirão as medalhas conquistadas.

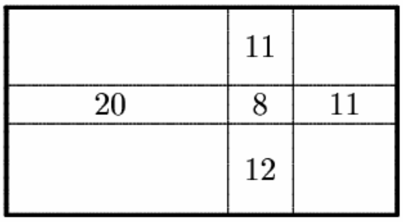
---

1) Escrever um número inteiro entre 1 e 9 em cada casa, sem repetições, para que em cada fila a multiplicação dos três números seja igual ao número indicado à sua direita e em cada coluna a multiplicação dos três números seja igual ao número indicado abaixo da respectiva coluna.

			70
			48
			108
64	45	126	

2) Sabe-se que x e y são números reais positivos tais que $x^2 + y^2 = 6xy$. Determine o valor de $\dfrac{x+y}{x-y}$.

3) Um retângulo é dividido em nove retângulos menores. O perímetro de cinco dos retângulos está indicado na figura. Determine o perímetro do retângulo maior.



4) João nasceu antes do ano 2000. Em 25 de agosto de 2001 ocorreu um fato interessante: João fez aniversário e passou a ter como idade um número que é igual a soma dos dígitos do ano em que nasceu. Determine a sua data de nascimento e justifique que esta é a única solução possível.

5) Um campeonato de futebol é disputado por 20 equipes. Durante o campeonato todas as equipes jogam entre si exatamente uma vez. Todos os jogos são realizados aos domingos, com cada time jogando exatamente uma vez por domingo. Ao conjunto destes 10 jogos realizados por domingo denominamos “rodada”. Por cada vitória o time vencedor ganha 3 pontos e o time perdedor não ganha nenhum ponto. Em caso de empate, cada um dos times ganha um ponto. Um time é declarado “campeão por antecedência” se, ao término de uma determinada rodada (antes da última rodada) atingir um certo número de pontos que permita não mais ser alcançado por nenhum dos outros times do campeonato, por mais que perca todos os seus jogos restantes. Determine o menor valor possível de n, de modo que na rodada n um time do campeonato possa ser declarado campeão por antecedência.

VIII Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

20/10/2007

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro ou compasso.
- Tudo que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas.
- Os nomes dos premiados (em ordem alfabética) serão divulgados dia 27 de outubro de 2007 no site oficial da olimpíada paraense de matemática: www.geocities.com/olimpmatpara e também na comunidade do orkut: "Olimpíada Paraense de Matemática"
- A cerimônia de premiação será realizada dia 30 de outubro, às 19:00 h, no auditório do Colégio Ideal Batista Campos. Somente nesta ocasião os alunos premiados descobrirão as medalhas conquistadas.

---

1) Seja f uma função definida nos conjunto dos números inteiros e que satisfaz as seguintes propriedades:
$f(0) \neq 0$
$f(1) = 3$
$f(x).f(y) = f(x + y) + f(x - y)$ para todos os inteiros x e y
Determine f(7).

2) Em um quadrilátero convexo ABCD suponha que: AB = 5 cm, CD = 8 cm, $\angle A\hat{B}C = 70^{\circ}$ e $\angle B\hat{C}D = 50^{\circ}$. Sejam P, Q, R e S os pontos médios de BC, CA, AD e DB respectivamente. Determine a área do quadrilátero PQRS.

3) Oito dos nove números 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 13 e 15 devem ser escritos nas casas vazias da tabela abaixo de modo que a média aritmética dos números em cada linha e em cada coluna sejam iguais a um mesmo valor inteiro. Descreva como a tabela pode ser preenchida e destaque qual dos nove números não vai ser escolhido para integrá-la.

1			
	9		5
		14	

4) Qual é o maior número de inteiros consecutivos tais que nenhum deles têm a soma de seus dígitos divisível por 5?

5) Demonstre que, para todo inteiro positivo n, o número $\frac{n^4}{12} - \frac{n^3}{3} + \frac{5n^2}{12} - \frac{n}{6}$ é um número inteiro.