VII Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 1

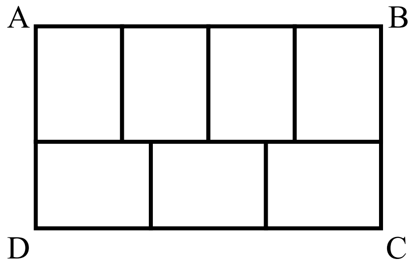
30/09/2006

1) Em cada quadrado introduz-se um dígito, de maneira que a multiplicação 45 x □3 = 3□□□ seja correta. Determine as possíveis soluções existentes.

2) Usando os algarismos de 1 a 6 podem-se formar dois números de 3 algarismos, por exemplo 645 e 321. A diferença entre esses dois números é 324. Forma-se agora com esses algarismos dois números de três algarismos cuja diferença seja a menor possível positiva. Quanto vale essa diferença?

3) No mesmo mês, três domingos caíram em dias com numerações pares. Qual dia da semana foi o dia 20 de tal mês?

4) Na figura, os sete retângulos são congruentes (iguais) e formam um retângulo maior ABCD de área 336 m^2. Qual o perímetro do retângulo maior ABCD?



5) Arnaldo recebe de seu avô quatro moedas antigas, todas aparentemente iguais. Seu avô afirmou que na época em que foram fabricadas a tecnologia de fabricação era atrasada, fazendo com que as moedas, por mais que possuíssem aparências idênticas, tivessem pesos diferentes. O avô então desafiou Arnaldo a determinar a seqüência crescente de peso das moedas sendo que para isto Arnaldo poderia utilizar somente uma balança de equilibrar de braços (aquela em que se coloca cada peso em cada braço da balança; se os pesos forem iguais os braços ficam equilibrados e se os pesos foram diferentes os braços desequilibram, sendo que o braço com o maior peso desce e o braço com o menor peso sobe). Determine o número mínimo de pesagens que Arnaldo deve realizar. Justifique.

VII Olimpíada Paraense de Matemática

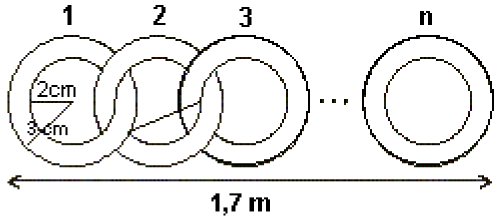
Segunda Fase – Nível 2

30/09/2006

1) Um famoso instituto de pesquisas de opinião popular foi contratado para avaliar a satisfação da população do país com relação ao seu presidente. Desta maneira formulou a seguinte pergunta: "Como você avalia o governo do atual presidente em relação ao presidente anterior?". Suponha que a pessoas responderam "MELHOR", b pessoas responderam "IGUAL" e c pessoas responderam "PIOR". De posse do resultado desta pesquisa sociólogos calcularam duas medidas de "otimismo social": $m = a + \frac{b}{2}$ e $n = a - c$. Suponha que exatamente 100 pessoas responderam à pergunta e que $m = 40$. Determine n.

2) Usando os algarismos de 1 a 6 podem-se formar dois números de 3 algarismos, por exemplo 645 e 321. A diferença entre esses dois números é 324. Forma-se agora com esses algarismos dois números de três algarismos cuja diferença seja a menor possível positiva. Quanto vale essa diferença?

3) Enlaçamos elos (com raio da circunferência exterior 3 cm e da interior 2 cm), como é mostrado na figura. Sendo o comprimento da corrente de 1,70 m, calcule a quantidade de elos necessários.



4) Suponha que você possui uma calculadora defeituosa que apresenta duas teclas quebradas: x (multiplicação de dois números) e ÷ (divisão de dois números). Porém a calculadora ainda efetua três operações corretamente: + (soma de dois números), – (subtração de dois números) e $\frac{1}{x}$ (calcula o recíproco de algum número x). Apesar das teclas defeituosas é possível usar esta calculadora para fazer uma série de contas. Por exemplo, é sabido que a expressão da Média Harmônica de três números a, b e c não nulos vale $\mathrm{MH} = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \dfrac{1}{\frac{1}{a+a+a}+\frac{1}{b+b+b}+\frac{1}{c+c+c}}$. Logo, uma seqüência de operações para calcular a Média Harmônica de a, b, c nesta calculadora seria:

(1) Calcular a + a + a; (2) Clicar $\frac{1}{x}$; (3) Calcular b + b + b; (4) Clicar $\frac{1}{x}$; (5) Calcular c + c + c;

(6) Clicar $\frac{1}{x}$; (7) Somar os valores obtidos em 2, 4 e 6; (8) Clicar $\frac{1}{x}$.

Usando somente as três operações permitidas na calculadora, descreva uma seqüência de operações de modo a obter:

a) a metade de um número;

b) o quadrado de um número diferente de 0 e 1;

c) o valor da multiplicação de dois números.

5) Arnaldo recebe de seu avô quatro moedas antigas, todas aparentemente iguais. Seu avô afirmou que na época em que foram fabricadas a tecnologia de fabricação era atrasada, fazendo com que as moedas, por mais que possuíssem aparências idênticas, tivessem pesos diferentes. O avô então desafiou Arnaldo a determinar a seqüência crescente de peso das moedas sendo que para isto Arnaldo poderia utilizar somente uma balança de equilibrar de braços (aquela em que se coloca cada peso em cada braço da balança; se os pesos forem iguais os braços ficam equilibrados e se os pesos foram diferentes os braços desequilibram, sendo que o braço com o maior peso desce e o braço com o menor peso sobe). Determine o número mínimo de pesagens que Arnaldo deve realizar. Justifique.

VII Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 3

30/09/2006

1) Arnaldo recebe de seu avô quatro moedas antigas, todas aparentemente iguais. Seu avô afirmou que na época em que foram fabricadas a tecnologia de fabricação era atrasada, fazendo com que as moedas, por mais que possuíssem aparências idênticas, tivessem pesos diferentes. O avô então desafiou Arnaldo a determinar a seqüência crescente de peso das moedas sendo que para isto Arnaldo poderia utilizar somente uma balança de equilibrar de braços (aquela em que se coloca cada peso em cada braço da balança; se os pesos forem iguais os braços ficam equilibrados e se os pesos foram diferentes os braços desequilibram, sendo que o braço com o maior peso desce e o braço com o menor peso sobe). Determine o número mínimo de pesagens que Arnaldo deve realizar. Justifique.

2) Todo mundo possui somente um ”aniversário mágico”, quando sua idade é exatamente igual a soma dos dígitos do ano do seu nascimento. Por exemplo, o aniversário mágico de alguém que nasceu em 1899 foi em 1926 (1926 – 1899 = 1 + 8 + 9 + 9). Perceba que alguém que nasceu em 1908 também possuiu aniversário mágico em 1926 (1926 – 1908 = 1 + 9 + 0 + 8). Qual é o próximo ano depois de 1926 no qual duas pessoas que nasceram em anos diferentes possuem ambos aniversários mágicos.

3) Suponha que você possui uma calculadora defeituosa que apresenta duas teclas quebradas: x (multiplicação de dois números) e ÷ (divisão de dois números). Porém a calculadora ainda efetua três operações corretamente: + (soma de dois números), – (subtração de dois números) e $\frac{1}{x}$ (calcula o recíproco de algum número x). Apesar das teclas defeituosas é possível usar esta calculadora para fazer uma série de contas. Por exemplo, é sabido que a expressão da Média Harmônica de três números a, b e c não nulos vale $MH = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{1}{\frac{1}{a+a+a}+\frac{1}{b+b+b}+\frac{1}{c+c+c}}$. Logo, uma seqüência de operações para calcular a Média Harmônica de a, b, c nesta calculadora seria:

(1) Calcular a + a + a; (2) Clicar $\frac{1}{x}$; (3) Calcular b + b + b; (4) Clicar $\frac{1}{x}$; (5) Calcular c + c + c;

(6) Clicar $\frac{1}{x}$; (7) Somar os valores obtidos em 2, 4 e 6; (8) Clicar $\frac{1}{x}$.

Usando somente as três operações permitidas na calculadora, descreva uma seqüência de operações de modo a obter o valor da multiplicação de dois números.

4) D, E e F são pontos escolhidos sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente, de modo que os triângulos AFE, BDF, CED e DEF possuem áreas iguais. Prove que D, E e F são os pontos médios dos lados de ΔABC.

5) Toda semana a Associação dos Tenistas Profissionais (ATP) divulga o ranking dos tenistas que disputam seus torneios. Assim, o tenista com melhores resultados naquele ano é o de número 1, o segundo com melhores resultados é o número 2 e assim sucessivamente. Para fechar o ano com chave de ouro a ATP resolveu realizar um campeonato com a presença dos 1024 melhores tenistas do ano. O campeonato é disputado na forma de eliminatória simples: os 1024 são organizados em 512 pares com os ganhadores passando para a 2ª rodada onde são organizados 256 pares e os vencedores passando para a 3ª rodada e assim por diante. Deste modo, depois de 10 rodadas é conhecido o campeão. Ao final do torneio observou-se um fato inusitado: se em determinada partida os números dos ranking's de dois tenistas diferem em mais de 2, sempre o tenista com menor número de ranking ganha. Calcule o maior número de ranking que o tenista vencedor do torneio pode ter?