

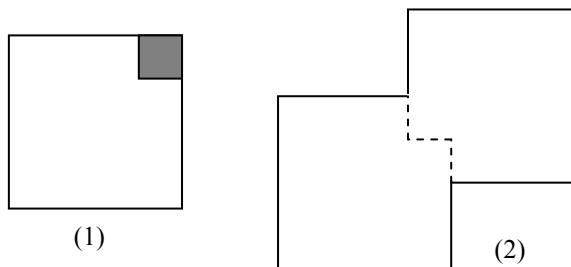
# VI Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 1

24/09/2005

1) Um editor embala livros em caixas, umas com capacidade para 10 livros e outras com capacidade para 24 livros. Suponha que ele embalou 198 livros em mais de 10 caixas no total. Quantas caixas de cada de cada tipo, 10 e 24 livros, ele usou?

2) A figura 1 é um quadrado de 24 cm de perímetro. Retira-se um quadrado de 8 cm de perímetro e com duas figuras iguais a figura 1, forma-se a figura 2. Qual é o perímetro da figura 2?



3) Numa aula de Matemática, a professora apanhou a Raquel distraída a falar com a colega de carteira. Para a castigar, a professora mandou-a escrever no quadro, durante o resto da aula, os números inteiros positivos:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ...

Quando a aula terminou a Raquel tinha acabado de escrever o milésimo algarismo. Quais foram os dois últimos algarismos que ela escreveu?

4) As amigas fazendeiras Ana e Beatriz iam todos os dias ao mercado vender galinhas. Beatriz vendia 30 galinhas por dia, ao preço de duas por R\$ 1,00. Ana vendia 30 galinhas por dia, ao preço de três por R\$ 1,00. Um dia, Ana ficou doente e pediu a Beatriz que vendesse as suas 30 galinhas. Entretanto, Beatriz sabia que o preço cobrado por Ana era diferente do preço que ela cobrava. Para não desagradar sua amiga, resolveu cobrar um outro preço neste dia. Assim, Beatriz levou 60 galinhas para o mercado e vendeu-as todas à razão de cinco galinhas por R\$ 2,00, repassando, posteriormente metade do valor arrecado para Ana. Determine quem saiu lucrando mais com este novo preço e quanto foi esse valor a mais no lucro.

5) Os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 são usados, cada um somente uma vez, para compor um número de cinco dígitos  $abcde$ , tal que o número de três dígitos  $abc$  é divisível por 4,  $bcd$  é divisível por 5 e  $cde$  é divisível por 3. Determine o número de cinco dígitos  $abcde$ .

# VI Olimpíada Paraense de Matemática

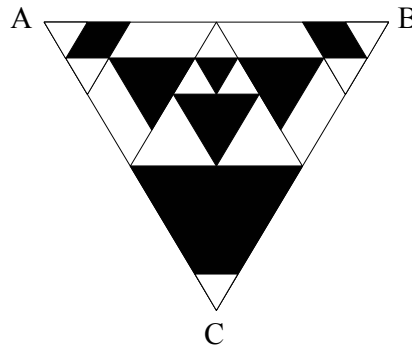
Segunda Fase – Nível 2

24/09/2005

1) Ao cair da tarde, o relógio de parede da casa de Laura parou. Quando Laura se deu conta, o relógio marcava 3 horas. Laura deu corda no relógio e imediatamente foi à casa de Mariana. Ao chegar, observou a hora do relógio de Mariana (que dava a hora exata), eram 5h 10min. Laura passou 2 horas conversando com Mariana e regressou a sua casa, gastando o mesmo tempo que a ida. Quando Laura chegou em casa lembrou que não havia acertado seu o relógio na casa de Mariana. Olhou e observou que seu relógio marcava 5h 40 min. Neste momento, Laura quis marcar a hora certa no seu relógio. Que horas deve marcar?

2) Determinar um número de dois dígitos sabendo que se o dividirmos pela soma dos seus dígitos o quociente é 7 e o resto é 3. Se invertermos os dígitos e dividirmos o número resultante pela soma dos seus dígitos o quociente é 3 o resto é 7.

3) O triângulo ABC representado na figura abaixo é equilátero e sua área é igual a  $4 \text{ m}^2$ . Os triângulos interiores se formam unindo-se os pontos médios dos lados. Calcule a área da zona sombreada.



4) Sejam  $x$  e  $y$  números reais tais que  $x + y = 26$  e  $x^3 + y^3 = 5408$ . Calcule  $x^2 + y^2$ .

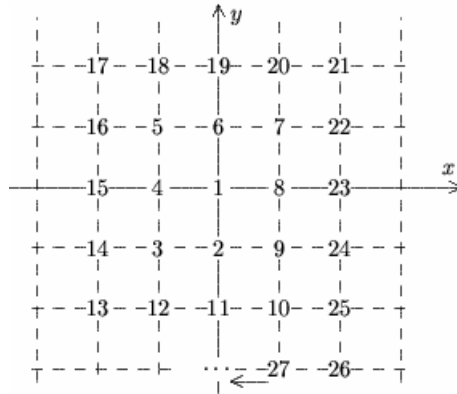
5) Maria, Diana, Silvia, Elia e Cristina estão sentadas em um banco do parque. Maria não está sentada no extremo direito e Diana não está sentada no extremo esquerdo. Silvia não está sentada em nenhum extremo. Cristina não está sentada junto a Silvia e Silvia não está sentada junto a Diana. Elia está sentada à direita de Diana, porém não necessariamente junto a ela. Quem está sentada no extremo direito?

# VI Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 3

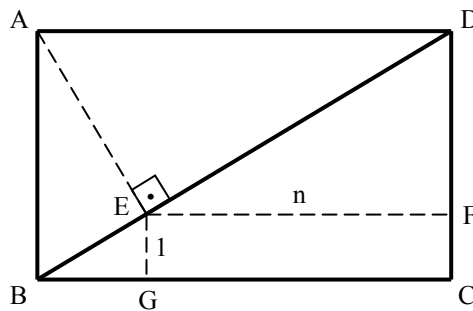
24/09/2005

1) Os pontos que possuem coordenadas inteiras são numerados como mostra a figura abaixo.



Determine as coordenadas do ponto com número 2005.

2) Na figura, o comprimento da diagonal BD no retângulo ABCD é  $d$  e E é o pé da perpendicular de BD em relação à A. Se a distância de E à reta BC é igual a 1 e a distância de E à reta CD é igual a  $n$ , prove que  $d^{2/3} - n^{2/3} = 1$ .



3) Suponha que  $N$  é um número de  $n$  dígitos tal que:

- (i) todos os  $n$  dígitos são distintos;
- (ii) a soma de todos três dígitos consecutivos é divisível por 5.

a) Prove que  $n$  é no máximo 6.

b) Mostre também que iniciando de qualquer dígito podemos encontrar um número de 6 dígitos com estas propriedades.

4) Sejam  $a$  e  $b$  números reais cuja soma é igual a 1. Prove que se  $a^3$  e  $b^3$  são racionais, então  $a$  e  $b$  são racionais.

5) No tabuleiro  $4 \times 3$  (4 linhas e 3 colunas) abaixo, podemos identificar 20 quadrados. Doze são formados por uma casa,