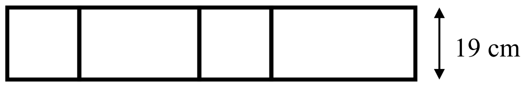
V Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 1

23/10/2004

1) A figura abaixo, formada por dois retângulos iguais e dois quadrados, tem 202 cm de perímetro e 19 cm de largura. Qual o perímetro de cada um dos retângulos iguais.

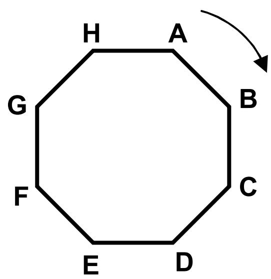


2) Em um salão de jogos existem quatro máquinas de video-game: A, B, C e D. As máquinas A e C pedem 2 fichas por jogo e as máquinas B e D pedem 1 ficha por jogo. Ralph gastou 24 fichas; jogou um total de 15 vezes e ao menos uma vez em cada máquina. Determine de quantas maneiras distintas pode ter jogado Ralph? Descreva todas possibilidades.

3) Aldo, Bruno, Carla e Daniela jogam com o auxílio de uma calculadora. Aldo começa escrevendo um número no visor da calculadora. Bruno soma 5, Carla subtrai 3, Daniela soma 9 e Aldo subtrai 7, e assim sucessivamente, com a mesma ordem e as mesmas operações. Se ao iniciar o jogo Aldo escreve 13 e ninguém equivoca-se, quem deverá fazer a última operação para que esteja escrito no visor o número 2002? Quantas operações fez cada uma das pessoas?

4) Observe o número 8161. Tem 4 dígitos: 8, 1, 6, 1. Não contém o dígito 0. O primeiro dígito é 8. A soma de todos os dígitos, sem contar o primeiro dígito é 1 + 6 + 1 = 8, ou seja, é igual ao primeiro dígito.
Qualquer número que não contém 0 e que verifica que a soma de todos os dígitos, exceto o primeiro dígito, é igual ao primeiro dígito chama-se de número olímpico. Assim, 8161 é um número olímpico de 4 dígitos.
a) Escreva um número olímpico de 5 dígitos que seja par.
b) Qual é o menor número olímpico de 4 dígitos? Justifique.
c) Qual é o maior número olímpico? Justifique.
d) Qual é o maior número olímpico que tem todos seus dígitos diferentes? Justifique.

5) Uma formiga caminha pelo bordo de um prato de 8 lados iguais como o da figura. Cada lado do prato mede 14 cm. A formiga sai do vértice A e caminha no sentido que indica a flecha, sempre pelo bordo do prato. Faz a primeira parada a 6 cm do vértice A e depois, a cada 6 cm faz uma parada. No total faz 2004 paradas.
a) Quantas vezes a formiga pára no vértice A?
b) Em que outros vértices a formiga faz a mesma quantidade de paradas que em A?



V OPM - Segunda Fase – Nível 1
Soluções

1) Solução:
Se a é o lado do quadrado e o lado menor do retângulo, então $a = 19$ cm. Seja b o lado maior do retângulo.
Assim: $202 = 6.a + 4.b = 6.19 + 4.b = 114 + 4.b \Rightarrow 4.b = 88 \Rightarrow b = 22$ cm
perímetro do retângulo = $2(a + b) = 82$ cm

2) Solução:
$2a + 2b + c + d = 24$ e $a + b + c + d = 15$. Subtraindo obtemos que $a + c = 9$ e $b + d = 6$.
Para $a + c = 9$ temos 8 possibilidades para os valores de a e c:

a	1	2	3	4	5	6	7	8
c	8	7	6	5	4	3	2	1

Para $b + d = 6$ temos 5 possibilidades para os valores de b e d:

b	1	2	3	4	5
d	5	4	3	2	1

Como para cada um dos 8 valores de a e c existem 5 possibilidades para b e d, temos um total de $8.5 = 40$ possibilidades.

3) Solução:
Inicialmente notemos que o número foi acrescido, no total, em $2002 – 13 = 1989$.
Em uma rodada, o número é acrescido de $5 – 3 + 9 – 7 = 4$.
Como 1989 não é múltiplo de 4, tiremos 9 para conseguir um número divisível por 9: $1989 – 9 – 1980$.
Como $1980 = 4.495$, então depois de 495 rodadas teremos o número $1980 + 13 = 1993$ escrito no visor.
Bruno soma 5 (1998), Carla subtrai 3 (1995), Daniela soma 9 (2004), Aldo subtrai 7 (1997), Bruno soma 5 (2002).
Portanto, a última operação é realizada por Bruno. Bruno fez 497 operações, Carla fez 496 operações, Daniela fez 496 operações e Aldo fez 496 operações.

4) Solução:
a) Existem várias soluções.
b) Como a soma dos três últimos dígitos é no mínimo 3 (1 + 1 +1), então o menor é 3111.
c) O maior número olímpico é o que inicia por 9 e possui a maior quantidade possível de dígitos,ou seja, 9111111111.
d) Tentemos montar um número olímpico que inicie por 9 e que tenha a maior quantidade possível de dígitos distintos.
Observemos que 9 não pode ser escrito como a soma de 4 números inteiros positivos distintos, pois $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
Podemos escrever 9 como soma de três inteiros positivos distintos das seguintes maneiras:
$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$.
Deste modo, a resposta é 9621.

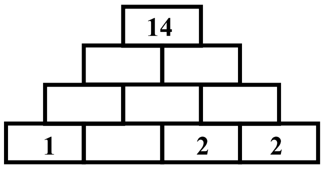
5) Solução:
a) Notemos inicialmente que o comprimento total do bordo do prato é $8.14 = 112$.
Por outro lado, mmc $(6, 112) = 336$ e $336/112 = 3$, ou seja, a cada 3 voltas a formiga pára novamente no ponto A.
O número de paradas feitas em 3 voltas é igual a $(3.112)/6 = 56$.
Assim, o número de ciclos de 3 voltas completas é igual à parte inteira do número 2004/56, ou seja, é igual a 35.
Como em cada ciclo de 3 voltas a formiga pára uma vez em A, então a formiga pára em A um total de 35 vezes.
b) Note que:
i) Na 1ª volta a formiga pára nos vértices D e G.
ii) Na 2ª volta a formiga pára nos vértices B, E e H.
iii) Na 3ª volta a formiga pára nos vértices C, F e A.
Nos 35 ciclos completos de 3 voltas, a formiga parou $56.35 = 1960$ vezes, sendo 35 vezes em cada vértice.
Assim, ainda faltam parar mais $2004 – 1960 = 44$ vezes. Deste modo, a formiga vai parar mais uma vez em D (na 7ª parada) , em G (na 14ª parada), em B (na 21ª parada), em E (na 28ª parada), em H (na 35ª parada) e em C (na 42ª parada).
Portanto, depois das primeiras 1960 paradas, a formiga somente não vai parar novamente em F e A. Desta forma, F é o único ponto em que formiga faz a mesma quantidade de paradas que em A.

V Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 2

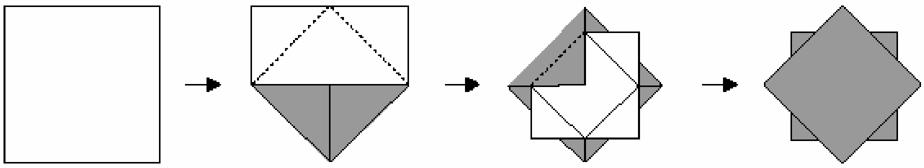
23/10/2004

1) No tabuleiro da figura existem quatro casas ocupadas.



Escreva em cada uma das seis casas vazias um número (não necessariamente inteiro) de modo que uma vez completo o tabuleiro com os 10 números, verifique-se que o número escrito em cada casa seja igual à soma dos dois números escritos nas duas casas sobre as quais está apoiada.

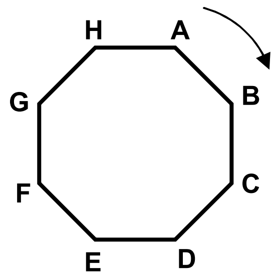
2) No Natal, a Tina fez uma estrela com uma folha de papel de lustro dourado, recortando um quadrado com 2 dm^2 de área e dobrando-o segundo o esquema indicado. A estrela obtida tem os lados todos iguais. Qual é o seu perímetro?



3) Uma formiga caminha pelo bordo de um prato de 8 lados iguais como o da figura. Cada lado do prato mede 14 cm. A formiga sai do vértice A e caminha no sentido que indica a flecha, sempre pelo bordo do prato. Faz a primeira parada a 6 cm do vértice A e depois, a cada 6 cm faz uma parada. No total faz 2004 paradas.

a) Quantas vezes a formiga pára no vértice A?

b) Em que outros vértices a formiga faz a mesma quantidade de paradas que em A?



4) Três pessoas, Abel, Benito e Ceferino, entretêm-se jogando poker. Antes do jogo, as quantidades de dinheiro que possuíam Abel, Benito e Ceferino estavam na relação 7:6:5, respectivamente, e, ao finalizar o jogo, as quantidades de dinheiro de cada um ficaram na relação 6:5:4, respectivamente. Se um dos jogadores ganhou R$ 12 no jogo, determine quanto dinheiro cada um tinha ao começar o jogo.

Nota: As quantidades A, B e C estão na relação x:y:z quando $\frac{A}{x} = \frac{B}{y} = \frac{C}{z}$.

5) Um dia, Ralph foi visitar um museu e se deparou um uma máquina estranha localizada em um canto do museu. A máquina tinha um orifício onde podia-se colocar uma moeda e também um display que indicada a pontuação do jogo. Na frente da máquina estavam escritas as instruções de funcionamento:

- a sua pontuação inicial é 1, como está indicado inicialmente no display;
- se você inserir duas moedas de 1 centavo, será somado 3 à sua pontuação;
- se você inserir cinco moedas de 1 centavo, sua pontuação será dobrada.

Considere que Ralph possui uma quantidade muito grande de moedas de 1 centavo em seu bolso.

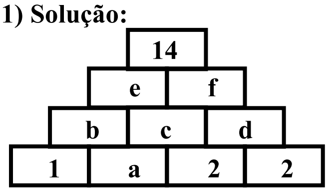
a) Inicialmente Ralph está disposto a gastar exatamente 12 centavos no jogo. Qual é o maior e o menor valor da pontuação final que Ralph pode obter?

b) Suponha agora que Ralph está disposto a gastar no máximo 36 moedas de 1 centavo no jogo. Qual é a maior pontuação final que ele pode obter usando algumas ou todas as moedas? Justifique sua resposta.

c) Explique porque, para qualquer seqüência de jogadas, os números que vão aparecendo no display nunca são divisíveis por 3.

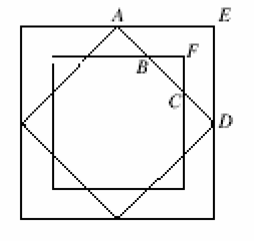
V OPM - Segunda Fase – Nível 2
Soluções

1) Solução:



Claramente $d = 4$.
Note que $c = a + 2$, $b = a + 1$, $f = c + 4$, $e = b + c$, $14 = e + f$.
Assim: $14 = e + f = b + c + c + 4 = a + 1 + 2a + 4 + 4 = 3a + 9 \Rightarrow a = 5/3$
Portanto: $b = 8/3 \quad c = 11/3 \quad e = 19/3 \quad f = 23/3$

2) Solução:



Como a área do quadrado é 2, tem-se $AE = ED = \sqrt{2}/2$ e, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AED, obtém-se $AD = 1$. Novamente por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BFC, e dado que $BF = FC$, tem-se $BC = \sqrt{2}BF$. Assim, $(2+\sqrt{2})BF = 1$, ou seja, $BF = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$. Portanto, o perímetro da estrela é $\dfrac{16}{2+\sqrt{2}} = 8(2-\sqrt{2})$ dm.

3) Solução:

a) Notemos inicialmente que o comprimento total do bordo do prato é 8.14 = 112.
Por outro lado, mmc (6, 112) = 336 e 336/112 = 3, ou seja, a cada 3 voltas a formiga pára novamente no ponto A.
O número de paradas feitas em 3 voltas é igual a (3.112)/6 = 56.
Assim, o número de ciclos de 3 voltas completas é igual à parte inteira do número 2004/56, ou seja, é igual a 35.
Como em cada ciclo de 3 voltas a formiga pára uma vez em A, então a formiga pára em A um total de 35 vezes.
b) Note que:
i) Na 1ª volta a formiga pára nos vértices D e G.
ii) Na 2ª volta a formiga pára nos vértices B, E e H.
iii) Na 3ª volta a formiga pára nos vértices C, F e A.
Nos 35 ciclos completos de 3 voltas, a formiga parou 56.35 = 1960 vezes, sendo 35 vezes em cada vértice.
Assim, ainda faltam parar mais 2004 – 1960 = 44 vezes. Deste modo, a formiga vai parar mais uma vez em D (na 7ª parada) , em G (na 14ª parada), em B (na 21ª parada), em E (na 28ª parada), em H (na 35ª parada) e em C (na 42ª parada).
Portanto, depois das primeiras 1960 paradas, a formiga somente não vai parar novamente em F e A. Desta forma, F é o único ponto em que formiga faz a mesma quantidade de paradas que em A.

4) Solução:

Seja x a quantidade total de dinheiro. Como a relação inicial de dinheiro é 7:6:5 as quantidades são: $x_A = \dfrac{7x}{18}$, $x_B = \dfrac{6x}{18}$ e $x_C = \dfrac{5x}{18}$.

Se 6:5:4 é a relação final, então, ao terminar o jogo cada um tem: $x'_A = \dfrac{6x}{15}$, $x'_B = \dfrac{5x}{15}$ e $x'_C = \dfrac{4x}{15}$

Como $\dfrac{7}{18} < \dfrac{6}{15}$ então Abel ganhou dinheiro com o jogo.

Como $\dfrac{6}{18} = \dfrac{5}{15}$ então Benito não ganhou e nem perdeu dinheiro com o jogo.

Como $\dfrac{5}{18} > \dfrac{4}{15}$ então Ceferino perdeu dinheiro com o jogo.

Assim, foi Abel quem ganhou R$ 12 reais com o jogo: $\dfrac{6x}{15} - \dfrac{7x}{18} = 12 \Rightarrow \dfrac{x}{90} = 12 \Rightarrow x = 1080$.

Desta forma, no início do jogo cada um tinha: $x_A = \dfrac{7.1080}{18} = 420$, $x_B = \dfrac{6.1080}{18} = 360$ e $x_C = \dfrac{5.1080}{18} = 300$.

5) Solução:

a) Existem quatro maneiras diferentes de usar todas as 12 moedas:

Ordem das jogadas	Pontuação final
$2\to2\to2\to2\to2\to2$	$1 + 6.3 = 19$
$2\to5\to5$	$(1 + 3).2.2 = 16$
$5\to2\to5$	$(1.2 + 3).2 = 10$
$5\to5\to2$	$1.2.2 + 3 = 7$

Portanto, a maior pontuação é 19 e a menor é 7.

b) Repare que se a pontuação é x e inserimos 5 centavos e depois 2 centavos a pontuação fica $2x + 3$. Entretanto se inserirmos 2 centavos e depois 5 centavos a pontuação fica $2x + 6$. Como $2x + 6 > 2x + 3$, então é mais negócio colocar toda uma seqüência de 2 centavos antes e depois colocar uma seqüência de 5 centavos. Vejamos as possibilidades:

Ordem das jogadas	Pontuação final
$5\to5\to5\to5\to5\to5\to5$	$1.2^7 = 128$
$2\to2\to2\to5\to5\to5\to5\to5\to5$	$(1+ 9)2^6 = 640$
$2\to2\to2\to2\to2\to5\to5\to5\to5\to5$	$(1 + 10)2^5 = 352$
$2\to2\to2\to2\to2\to2\to2\to2\to5\to5\to5\to5$	$(1 + 24)2^4 = 400$
$2\to2\to2\to2\to2\to2\to2\to2\to2\to2\to5\to5\to5$	$(1 + 30)2^3 = 248$

Outras seqüências são possíveis, porém com pontuações menores que os valores acima calculados. Assim, a soma máxima é 640.

c) Como a pontuação inicial é 1, somando 3 seguidamente sempre passaremos para números que também deixam resto 1 na divisão por 3. Se multiplicarmos por 2 um número que não é divisível por 3, obteremos também um número que não é divisível por 3.

V Olimpíada Paraense de Matemática

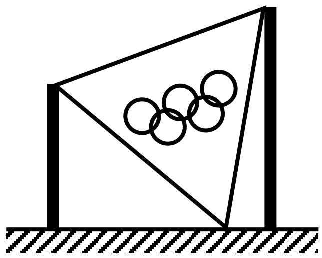
Segunda Fase – Nível 3

23/10/2004

1) Um dia, Ralph foi visitar um museu e se deparou um uma máquina estranha localizada em um canto do museu. A máquina tinha um orifício onde podia-se colocar uma moeda e também um display que indicada a pontuação do jogo. Na frente da máquina estavam escritas as instruções de funcionamento:
- a sua pontuação inicial é 1, como está indicado inicialmente no display;
- se você inserir duas moedas de 1 centavo, será somado 3 à sua pontuação;
- se você inserir cinco moedas de 1 centavo, sua pontuação será dobrada.

Considere que Ralph possui uma quantidade muito grande de moedas de 1 centavo em seu bolso.
a) Inicialmente Ralph está disposto a gastar exatamente 12 centavos no jogo. Qual é o maior e o menor valor da pontuação final que Ralph pode obter?
b) Suponha agora que Ralph está disposto a gastar no máximo 36 moedas de 1 centavo no jogo. Qual é a maior pontuação final que ele pode obter usando algumas ou todas as moedas? Justifique sua resposta.
c) Explique porque, para qualquer seqüência de jogadas, os números que vão aparecendo no display nunca são divisíveis por 3.

2) Em homenagem às Olimpíadas de Atenas, um grupo de amigos resolveu construir uma grande bandeira em forma de triângulo equilátero, que será suspensa por dois de seus vértices através de postes verticais, um de 4 metros e outro de 3 metros. O terceiro vértice da bandeira apenas toca o solo. Se o comprimento de cada lado da bandeira é d, determine o valor de d na forma $\sqrt{\frac{n}{m}}$, onde n e m são números naturais.



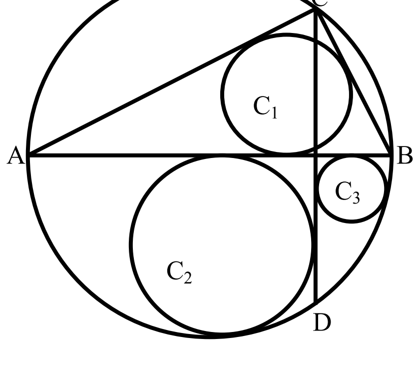
3) a) Se $a^2 = 7b + 51$ e $b^2 = 7a + 51$, onde a e b são números reais distintos, determine o valor do produto ab.
b) Quando a, b e c são os três números racionais $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, o valor de $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=$

$$=\frac{1}{(1/6)^2}+\frac{1}{(2/15)^2}+\frac{1}{(3/10)^2}=36+\frac{225}{4}+\frac{100}{9}=\frac{1296+2025+400}{36}=\frac{3721}{36}=\frac{61^2}{6^2}=\left(\frac{61}{6}\right)^2$$ é o quadrado de um número racional.

Prove que este fato não é uma coincidência, ou seja, para quaisquer valores de a, b e c racionais, a quantidade $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$ é sempre o quadrado de um número racional.

4) Quatro números pares consecutivos são removidos do conjunto {1, 2, 3, ..., n}. Se a média dos números restantes é 51,5625, determine o valor de n e quais são os números removidos?

5) Na figura, AB é um diâmetro da circunferência maior e CD é perpendicular a AB. A circunferência C_1 (de raio r_1) é tangente aos 3 lados de ΔABC, C_2 (de raio r_2) e C_3 (de raio r_3) são tangentes a AB, CD e à circunferência maior.
a) Calcule o valor de r_1 em função dos lados de ΔABC;
b) Mostre que $2r_1 = r_2 + r_3$.



V OPM - Segunda Fase – Nível 3
Soluções

1) Solução:

a) Existem quatro maneiras diferentes de usar todas as 12 moedas:

Ordem das jogadas	Pontuação final
2→2→2→2→2→2	1 + 6.3 = 19
2→5→5	(1 + 3).2.2 = 16
5→2→5	(1.2 + 3).2 = 10
5→5→2	1.2.2 + 3 = 7

Portanto, a maior pontuação é 19 e a menor é 7.

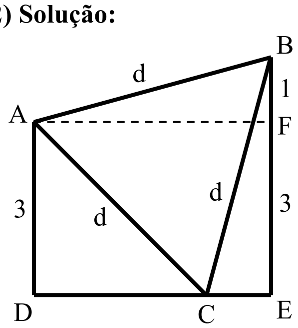
b) Repare que se a pontuação é x e inserimos 5 centavos e depois 2 centavos a pontuação fica 2x + 3. Entretanto se inserirmos 2 centavos e depois 5 centavos a pontuação fica 2x + 6. Como 2x + 6 > 2x + 3, então é mais negócio colocar toda uma seqüência de 2 centavos antes e depois colocar uma seqüência de 5 centavos. Vejamos as possibilidades:

Ordem das jogadas	Pontuação final
5→5→5→5→5→5→5	$1.2^7 = 128$
2→2→2→5→5→5→5→5→5	$(1+9)2^6 = 640$
2→2→2→2→2→5→5→5→5→5	$(1 + 10)2^5 = 352$
2→2→2→2→2→2→2→2→5→5→5→5	$(1 + 24)2^4 = 400$
2→2→2→2→2→2→2→2→2→2→5→5→5	$(1 + 30)2^3 = 248$

Outras seqüências são possíveis, porém com pontuações menores que os valores acima calculados. Assim, a soma máxima é 640.

c) Como a pontuação inicial é 1, somando 3 seguidamente sempre passaremos para números que também deixam resto 1 na divisão por 3. Se multiplicarmos por 2 um número que não é divisível por 3, obteremos também um número que não é divisível por 3.

2) Solução:



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulo ΔADC, ΔBCE e ΔAFB:

$CD = \sqrt{d^2 - 9}$, $CE = \sqrt{d^2 - 16}$ e $AF = \sqrt{d^2 - 1}$.

Como AF = DE = DC + CE então: $\sqrt{d^2 - 1} = \sqrt{d^2 - 9} + \sqrt{d^2 - 16}$.

Elevando ao quadrado:

$$d^2 - 1 = d^2 - 9 + d^2 - 16 + 2\sqrt{(d^2 - 9)(d^2 - 16)} \Rightarrow 24 - d^2 = 2\sqrt{(d^2 - 9)(d^2 - 16)} \Rightarrow$$

$$d^4 - 48d^2 + 576 = 4(d^2 - 9)(d^2 - 16) = 4d^4 - 100d^2 + 576 \Rightarrow 3d^4 - 52d^2 = 0 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{52}{3}}.$$

3) Solução:

a) Subtraindo as duas equações: $a^2 - b^2 = 7(b - a) \Rightarrow (a - b)(a + b) = -7(a - b)$

Como $a \neq b \Rightarrow a + b = -7$

i) $a^2 = 7(-7 - a) + 51 \Rightarrow a^2 = -7a + 2 \Rightarrow a^2 + 7a - 2 = 0$

ii) $b^2 = 7(-7 - b) + 51 \Rightarrow b^2 = -7b + 2 \Rightarrow b^2 + 7b - 2 = 0$

Assim, a e b são as raízes da equação $x^2 + 7x - 2 = 0 \Rightarrow ab = -2$

b) Fazendo $x = \frac{1}{a-b}$, $y = \frac{1}{b-c}$ e $z = \frac{1}{c-a}$ então $\frac{1}{x} = a - b$, $\frac{1}{y} = b - c$ e $\frac{1}{z} = c - a$. Assim: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Desenvolvendo esta última expressão obtemos yz + zx + xy = 0.

Portanto: $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2$, ou seja:

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2.$$

4) 1ª Solução:

Notemos inicialmente que $51{,}5625 = \frac{515625}{10000} = \frac{825}{16}$.

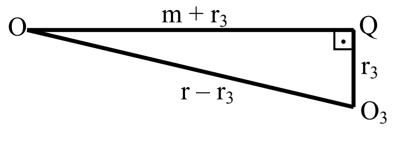
Assim, denotando por S a soma dos n – 4 números, nós temos que $\frac{S}{n-4} = \frac{825}{16} \Rightarrow 16.S = 825(n - 4)$.

Desde que 16 e 825 são primos relativos, então $16 \mid (n - 4) \Rightarrow n = 16k + 4$, para algum inteiro positivo k (k não pode ser 0 desde que n deve ser ao menos 8, uma vez que A deve possuir pelo menos 4 números pares).

A soma de todos os números em A é $\frac{n(n+1)}{2}$, implicando que a média dos seus valores é $\frac{n+1}{2}$. Como quatro números são removidos, a média aritmética deve alterar, mas não deve alterar relativamente muito.
Assim, espera-se que $\frac{n+1}{2}$ seja próximo de 51,5625, ou seja, n + 1 deve ser próximo de 103,125.
Desde que os valores de 16k + 4 próximos de 103,125 são 84, 100 e 116, temos três candidatos a valores de n para serem testados.
i) n = 84: Sejam a – 3, a – 1, a + 1 e a + 3 os números retirados.
Portanto: $\frac{(1+2+3+...+84)-4a}{80} = \frac{825}{16} \Rightarrow 3570 - 4a = 4125 \Rightarrow 4a = -555 \Rightarrow$ a não é inteiro.
ii) $\boxed{n = 100:}$ Sejam a – 3, a – 1, a + 1 e a + 3 os números retirados.
Portanto: $\frac{(1+2+3+...+100)-4a}{96} = \frac{825}{16} \Rightarrow 5050 - 4a = 4950 \Rightarrow$
$4a = 100 \Rightarrow a = 25 \Rightarrow$ os quatro números são $\boxed{22, 24, 26 \text{ e } 28.}$
iii) n = 116:
Sejam a – 3, a – 1, a + 1 e a + 3 os números retirados. Portanto: $\frac{(1+2+3+...+116)-4a}{112} = \frac{825}{16} \Rightarrow$
$6786 - 4a = 5775 \Rightarrow 4a = 1011 \Rightarrow$ a não é inteiro.

4) 2ª Solução:
Notemos inicialmente que $51{,}5625 = \frac{515625}{10000} = \frac{825}{16}$.
Assim, denotando por S a soma dos n – 4 números, nós temos que $\frac{S}{n-4} = \frac{825}{16} \Rightarrow 16.S = 825(n-4)$.
Desde que 16 e 825 são primos relativos, então $16 \mid (n-4) \Rightarrow n = 16k + 4$, para algum inteiro positivo k
i) O menor valor da média dos números restantes é: $\frac{(1+2+...+n)-(n+n-2+n-4+n-6)}{n-4} = \frac{n^2-7n+24}{2(n-4)}$.
Assim, este valor deve ser menor que 51,5625: $n^2 - 7n + 24 \le 51{,}5625[(2(n-4)] \Rightarrow$
$n^2 - 110{,}25n + 463{,}5 \le 0 \Rightarrow 9 \le n \le 106$ (1)
ii) Analogamente, o maior valor da média é: $\frac{(1+2+...+n)-(2+4+6+8)}{n-4} = \frac{n^2+n-40}{2(n-4)}$.
Deste modo, este valor deve ser maior que 51,5625: $n^2 + n - 40 \ge 51{,}5625[(2(n-4)] \Rightarrow$
$n^2 - 102{,}125n + 372{,}5 \ge 0 \Rightarrow n \le 7$ ou $n \ge 99$ (2)
Observemos que a interseção das desigualdades (1) e (2) nos fornece $99 \le n \le 106$.
Como o único inteiro n entre 99 e 106 da forma 16k + 4 é 100, temos que $\boxed{n = 100.}$
Sejam a – 3, a – 1, a + 1 e a + 3 os números retirados. Portanto: $\frac{(1+2+3+...+100)-4a}{96} = \frac{825}{16} \Rightarrow$
$5050 - 4a = 4950 \Rightarrow 4a = 100 \Rightarrow a = 25 \Rightarrow$ os quatro números são $\boxed{22, 24, 26 \text{ e } 28.}$

5) Solução:
a) Sejam: a = BC, b = AC, c = AB, O = centro da circunferência maior, O_3 = centro da circunferência C_3, $P = AB \cap CD$ e r = raio da circunferência maior. Como ΔABC é retângulo então $c^2 = a^2 + b^2$ e $r_1 = (a + b - c)/2$.
b) Observe o seguinte triângulo:



Seja Q o ponto onde a AB tangência C_3 e m = OP.
Como $m = OP = AP - AO = \frac{b^2}{c} - \frac{c}{2}$
Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔOQO_3: $\overline{OO_3}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QO_3}^2 \Rightarrow$

$$\left(\frac{c}{2} - r_3\right)^2 = \left(\frac{b^2}{c} - \frac{c}{2} + r_3\right)^2 + r_3^2 = \left[\frac{b^2}{c} - \left(\frac{c}{2} - r_3\right)\right]^2 + r_3^2 = \frac{b^4}{c^2} - \frac{2b^2}{c}\left(\frac{c}{2} - r_3\right) + \left(\frac{c}{2} - r_3\right)^2 + r_3^2 \Rightarrow$$

$$r_3^2 + \left(\frac{2b^2}{c}\right)r_3 + \frac{b^2}{c^2}(b^2 - c^2) = 0 \Rightarrow r_3^2 + \left(\frac{2b^2}{c}\right)r_3 - \left(\frac{ab}{c}\right)^2 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$r_3 = \frac{-\frac{2b^2}{c} \pm \sqrt{\frac{4b^4}{c^2} + \frac{4a^2b^2}{c^2}}}{2} = \frac{-\frac{2b^2}{c} \pm \frac{2b}{c}\sqrt{b^2 + a^2}}{2} = -\frac{b^2}{c} \pm b \quad \therefore \text{Como } r_3 > 0 \Rightarrow r_3 = b - \frac{b^2}{c}$$

Analogamente, para C_2 encontramos que $r_2 = a - \dfrac{a^2}{c}$

Assim: $r_2 + r_3 = a - \dfrac{a^2}{c} + b - \dfrac{b^2}{c} = a + b - \dfrac{(a^2 + b^2)}{c} = a + b - c = 2r_1$