

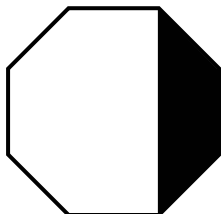
IV Olimpíada Paraense de Matemática

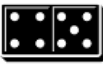
Segunda Fase – Nível 1

04/10/2003

1) Os torcedores do clube A.B.C. celebram, desde 1902 e de 5 em 5 anos, uma festa em honra do seu clube. Por sua vez, os torcedores do clube rival C.B.A. celebram, desde 1903 e de 7 em 7 anos, uma festa em honra do seu clube. Quais os anos em que os clubes foram festejados simultaneamente até hoje?

2) Determine que fração da área do octógono está pintada de preto.



3) Considere todas as peças de dominó, exceto o duplo zero. Levando em conta os números de cada peça, a cada uma delas corresponderá uma fração menor ou igual a 1, obtida pela divisão dos números em cada peça do dominó. Por exemplo, a peça  equivale à fração $\frac{4}{5}$. Ache a soma desses 27 números.

4) No país chamado Paralândia existem 10 equipes de futebol e, portanto, cada rodada possui cinco partidas. Em determinada rodada os jogos eram os seguintes:

	Coluna I		Coluna II
Jogo 1	Paysandoso	x	Izabeloso
Jogo 2	Remoso	x	Sportoso
Jogo 3	Tunoso	x	Marituboso
Jogo 4	Aguioso	x	Ananindoso
Jogo 5	Castanhoso	x	São Raimundoso

Três apostadores A, B e C apostaram na loteria esportiva da Paralândia, sendo que o apostador A acertou o resultado de 3 jogos, o apostador B acertou 3 jogos e o apostador C acertou 2 jogos. De posse dos cartões marcados por A, B e C, determine o cartão ganhador, ou seja, os resultados corretos dos cinco jogos.

	I	E	II
1	X		
2	X		
3		X	
4		X	
5			X

Apostador A

	I	E	II
1			X
2		X	
3	X		
4		X	
5	X		

Apostador B

	I	E	II
1	X		
2	X		
3			X
4	X		
5		X	

Apostador C

Obs: I – Coluna I; E – Empate; II – Coluna 2.

5) Numa divisão, vários números ficaram borrados.

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \square \square \square \square \square \quad | \quad 1 \square \\
 \square \square \square \square \square \square \square \square \quad | \quad \square 0 8 \square \square \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0 \quad \square \square \\
 \square \square \\
 \hline
 0 \quad \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

Recomponha a divisão acima.

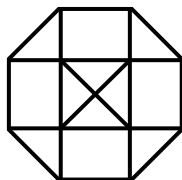
IV OPM - Segunda Fase – Nível 1

Soluções

1) Solução:

Notemos que o primeiro ano em que os clubes foram festejados foi 1917. Como $\text{mdc}(7, 5) = 35$, então depois de 1917 os clubes foram festejados simultaneamente de 35 em 35 anos. Assim, os anos requeridos são: 1917, 1952 e 1987.

2) Solução:



Divida o octógono em retângulos iguais e triângulos iguais como indicado na figura ao lado. Perceba que a área pintada possui 2 dos 8 triângulos e possui também 1 dos 4 retângulos. Assim, a área pintada representa $\frac{1}{4}$ ou 25% da área total do octógono.

3) Solução:

$$S = \frac{6+5+4+3+2+1}{6} + \frac{5+4+3+2+1}{5} + \frac{4+3+2+1}{4} + \frac{3+2+1}{3} + \frac{2+1}{2} + \frac{1}{1} \Rightarrow$$

$$S = \frac{7}{2} + \frac{6}{2} + \frac{5}{2} + \frac{4}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \Rightarrow S = \frac{27}{2}$$

4) Solução:

Se A e B tem 3 acertos cada um, então existe um acerto comum. Portanto, a partida 4 acabou empatada.

Se C acertou o resultado da partida 3, então não podemos ter A e B com 3 acertos. O mesmo ocorre se C acertou a partida 5.

Assim, concluímos que C acertou as partidas 1 e 2. Conseqüentemente, A acertou as partidas 1, 2 e 4; B acertou as partidas 3, 4 e 5.

O cartão ganhador é:

	I	E	II
1	X		
2	X		
3	X		
4		X	
5	X		

5) Solução:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccccc|cc}
 E & F & G & H & I & J & K & & & 1 & D \\
 E & F & G & & & & & & & A & 0 & 8 & B & C \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & &
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccc}
 & & & H & I \\
 & & & \square & \square \\
 \hline
 & & & 0 & \square & J & K \\
 & & & & \square & \square & \square \\
 \hline
 & & & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

1) $A \times 1D = EFG$

2) Note que quando baixa-se J não foi possível dividir, logo $B = 0$.

4) Quando se faz $8 \times 1D$ obtém-se um número de dois algarismos. Porém $A \times 1D$ possuiu três algarismos, logo $A = 9$.

5) O mesmo acontece com $C \times 1D \Rightarrow D = 9$.

6) Note que já está pronto o quociente: 90809

7) Como $8 \times 11 = 88 < 100$, $9 \times 11 = 99 < 100$, $8 \times 12 = 96 < 100$ e $9 \times 12 = 108 > 100 \Rightarrow D = 2$.

8) Portanto: $(12)(90809) + 1 = 1089709$

IV Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 2

04/10/2003

1) Seja ABCD um retângulo e AC uma diagonal. Traçam-se desde B e desde D perpendiculares à diagonal AC, que a intersectam em P e Q, respectivamente. Sabe-se que os pontos P e Q dividem AC em três segmentos iguais, de comprimento 1. Determinar a área do retângulo ABCD.

2) No país chamado Paralândia existem 10 equipes de futebol e, portanto, cada rodada possui cinco partidas. Em determinada rodada os jogos eram os seguintes:

	Coluna I		Coluna II
Jogo 1	Paysandoso	x	Izabeloso
Jogo 2	Remoso	x	Sportoso
Jogo 3	Tunoso	x	Marituboso
Jogo 4	Aguioso	x	Ananindoso
Jogo 5	Castanhoso	x	São Raimundoso

Três apostadores A, B e C apostaram na loteria esportiva da Paralândia, sendo que o apostador A acertou o resultado de 3 jogos, o apostador B acertou 3 jogos e o apostador C acertou 2 jogos. De posse dos cartões marcados por A, B e C, determine o cartão ganhador, ou seja, os resultados corretos dos cinco jogos.

	I	E	II
1	X		
2	X		
3		X	
4		X	
5			X

Apostador A

	I	E	II
1			X
2		X	
3	X		
4		X	
5	X		

Apostador B

	I	E	II
1	X		
2	X		
3			X
4	X		
5		X	

Apostador C

Obs: I – Coluna I; E – Empate; II – Coluna 2.

3) A data 31/03/93 é dita “interessante” pois $31 \times 03 = 93$. Se todas as datas são escritas desta maneira, determine todos os anos de 1901 até 1999 que não possuíram datas interessantes.

4) Se a, b e c são reais não nulos satisfazendo: $a^2 - b^2 = bc$ e $b^2 - c^2 = ac$. Prove que $a^2 - c^2 = ab$.

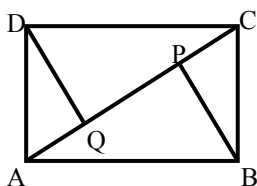
5) No tabuleiro na figura seis casas estão vazias. Escreva em cada uma destas seis casas um número distinto de zero que, uma vez completo, o tabuleiro seja um *quadrado mágico multiplicativo*, ou seja, ao multiplicarmos os três números de cada linha horizontal (—), vertical (|), diagonal principal (↘) ou diagonal secundária (↙), obtém-se sempre o mesmo resultado.

	9	5
1		

IV OPM - Segunda Fase – Nível 2

Soluções

1) Solução:



$$\text{Seja } x = BP = DQ. \text{ Como } \triangle APB \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

$$\text{Assim: } (ABCD) = 2(ABC) = 2 \frac{AC \cdot PB}{2} = 3\sqrt{2}$$

2) Solução:

Se A e B tem 3 acertos cada um, então existe um acerto comum. Portanto, a partida 4 acabou empatada.

Se C acertou o resultado da partida 3, então não podemos ter A e B com 3 acertos. O mesmo ocorre se C acertou a partida 5.

Assim, concluímos que C acertou as partidas 1 e 2. Conseqüentemente, A acertou as partidas 1, 2 e 4; B acertou as partidas 3, 4 e 5. O cartão ganhador é:

	I	E	II
1	X		
2	X		
3	X		
4		X	
5	X		

3) Solução:

Repare inicialmente que todos os anos desde 1901 até 1931 possuem datas interessantes, uma vez que basta observar a data N/01/N, onde $1 \leq N \leq 31$. Repare agora que os anos pares de 1932 até 1956 possuem datas interessantes, uma vez

que $\frac{N}{2}/02/N$, com $32 \leq N \leq 56$, é uma data interessante. Em 1958 não tivemos uma data interessante pois a única

possibilidade seria 29/02/58, que não existiu pois 1958 não foi um ano bissexto (58 não é divisível por 4).

Na verdade, repare que um ano N possui uma data interessante se N ($01 \leq N \leq 99$) pode ser decomposto da forma $N = x.y$, onde $1 \leq x \leq 28$ e $1 \leq y \leq 12$. Note que os números primos maiores que 31 (37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97) não podem ser decompostos desta maneira. Os números pares N entre 60 e 99 que são iguais duas vezes um primo (62, 74, 78, 82, 86, 94) também não apresentam datas interessantes. Analisando a divisibilidade por 3, como $100/3 = 33,33\dots$, os únicos casos a serem levados em consideração seriam $N = 93$ (exemplo do enunciado) e $N = 99$, que possui as datas interessantes 11/09/99 e 09/11/99. Portanto, os anos que não possuíram datas interessantes foram: 1937, 1941, 1943, 1947, 1953, 1958, 1959, 1961, 1962, 1967, 1971, 1973, 1974, 1978, 1979, 1982, 1983, 1986, 1989, 1994 e 1997.

4) Solução:

$$a^2 - b^2 = bc \Rightarrow a^2 = b^2 + bc = b(b + c) \Rightarrow b + c = \frac{a^2}{b}$$

$$b^2 - c^2 = ac \Rightarrow (b + c)(b - c) = ac \Rightarrow \frac{a^2}{b}(b - c) = ac \Rightarrow a(b - c) = bc \Rightarrow ab - ac = bc \Rightarrow ab = bc + ac$$

$$\text{Assim: } a^2 - c^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) = bc + ac = ab$$

5) Solução:

a	9	5
1	b	c
d	e	f

$$1^{\text{a}} \text{ linha} = 1^{\text{a}} \text{ coluna} \Rightarrow a.9.5 = a.1.d \Rightarrow d = 45$$

a	9	5
1	b	c
45	e	f

$$2^{\text{a}} \text{ coluna} = \text{diagonal secundária} \Rightarrow 9.b.e = 5.45.b \Rightarrow e = 25$$

a	9	5
1	b	c
45	25	f

$$3^{\text{a}} \text{ linha} = 3^{\text{a}} \text{ coluna} \Rightarrow 45 \cdot 25 \cdot f = 5 \cdot c \cdot f \Rightarrow c = 225$$

a	9	5
1	b	225
45	25	f

$$1^{\text{a}} \text{ linha} = 2^{\text{a}} \text{ linha} \Rightarrow a \cdot 9 \cdot 5 = 1 \cdot b \cdot 225 \Rightarrow a = 5b$$

$$\text{diagonal principal} = 3^{\text{a}} \text{ coluna} \Rightarrow a \cdot b \cdot f = 5 \cdot 225 \cdot f \Rightarrow 5b^2 = 5 \cdot 225 \Rightarrow b = 15 \Rightarrow a = 75$$

$$1^{\text{a}} \text{ coluna} = 3^{\text{a}} \text{ linha} \Rightarrow 75 \cdot 1 \cdot 45 = 5 \cdot 225 \cdot f \Rightarrow f = 3$$

Assim, temos o seguinte quadrado mágico multiplicativo:

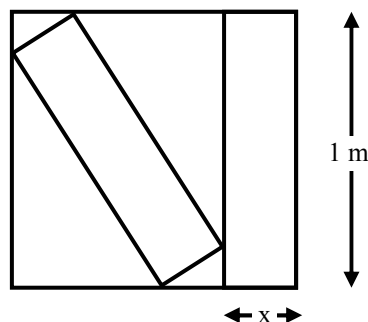
75	9	5
1	15	225
45	25	3

IV Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 3

04/10/2003

1) Em uma caixa quadrada de guardar livros, dois livros idênticos são colocados como mostra a figura abaixo. Suponha que a altura dos livros é de 1 m. Determine a espessura x dos livros.



2) O Curupira, o Boto Cor de Rosa e a Cobra Grande organizaram, em um final de semana, uma competição entre eles, consistindo em várias provas de atletismo. O vencedor em cada prova ganhava x pontos, o segundo classificado ganhava y pontos e o terceiro classificado ganhava z pontos ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$ e $x > y > z$). O resultado final da competição, obtido por soma das pontuações em cada prova, foi:

Curupira	22 pontos
Boto Cor de Rosa	09 pontos
Cobra Grande	09 pontos

Em quantas provas competiram e quem ficou em segundo lugar no salto em altura sabendo que a Cobra Grande ganhou os 100 metros e que ninguém desistiu em nenhuma prova?

3) Um colecionador possui moedas de ouro, prata e bronze. Algumas são americanas e outras espanholas. Tem no total 588 moedas. Das de cobre, $4/7$ são espanholas. A quantidade de moedas de ouro e prata juntas é $3/4$ da quantidade de moedas de cobre. Entre moedas de cobre e moedas americanas tem-se um total de 360. Tem-se tantas moedas espanholas como moedas de ouro e cobre juntas. Quantas moedas de cobre e ouro existem?

4) a) Determine dentre os 100 primeiros termos da seqüência $a_n = n^n$, $1 \leq n \leq 100$, quantos são quadrados perfeitos.

b) Determine o algarismo das unidades de $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9$.

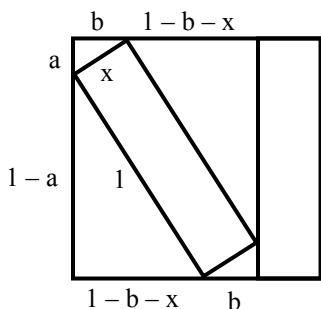
c) Determine o algarismo das unidades de $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + \dots + 98^{98} + 99^{99}$.

5) Prove que $\frac{2001}{2} - \frac{2000}{3} + \frac{1999}{4} - \frac{1998}{5} + \dots - \frac{2}{2001} + \frac{1}{2002} = \frac{1}{1002} + \frac{3}{1003} + \frac{5}{1004} + \dots + \frac{2001}{2002}$.

IV OPM - Segunda Fase – Nível 3

Soluções

1) Solução:



Pela semelhança de triângulos:

$$\frac{a}{1-b-x} = \frac{b}{1-a} = \frac{x}{1} \Rightarrow b = x(1-a) \quad \text{e} \quad 1-b-x = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 + bx = x - a$$

Pelo Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = x^2 \Rightarrow a^2 + x^2(1-2a+a^2) = x^2 \Rightarrow a^2 + x^2 - x^2(2a-a^2) = x^2 \Rightarrow a = x^2(2-a) \Rightarrow a = x^2 + x^2(1-a) \Rightarrow a = x^2 + bx \Rightarrow$

$$a = x - a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = x^2 \left(2 - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow x(4-x) = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 2 - \sqrt{3}$$

2) Solução:

Se n é a quantidade de provas disputadas, então $n(x + y + z) = 22 + 9 + 9 = 40$.

Repare que se $x > y > z$ então $x + y + z \geq 3 + 2 + 1 = 6$ e também que $n \cdot x \geq 22$.

Testemos todos os casos em que $x + y + z \neq 6$ e $n \cdot x \geq 22$:

i) $x + y + z = 20$ e $n = 2$. Os únicos resultados possíveis são: Curupira – x e y Boto – y e z Cobra – x e z

Assim: $x + y = 22$ $y + z = 9$ $x + z = 9 \Rightarrow x = y = 11$ e $z = -2$ que não satisfaz o enunciado

ii) $x + y + z = 10$ e $n = 4$ ∴ Analisemos as possibilidades:

a) $x = 6$ $y = 3$ $z = 1$ é impossível pois não é possível escrever 22 como soma de quatro valores dentre 6, 3 e 1.

b) $x = 7$ $y = 2$ $z = 1$ é impossível pois não é possível escrever 22 como soma de quatro valores dentre 7, 2 e 1.

iii) $x + y + z = 8$ e $n = 5$ $\Rightarrow z = 1$ $y = 2$ $x = 5$ ou $z = 1$ $y = 3$ $x = 4$ (impossível, pois se $x = 4$ então 22 pontos não são possíveis de serem alcançados em 5 provas)

Distribuindo os pontos: Curupira: $22 = 5 + 5 + 5 + 5 + 2$ Boto: $9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$ Cobra: $9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 5$

Assim, Curupira ganhou 4 provas e chegou em segundo em uma, que foi vencida pela Cobra (100 metros). Em todas as outras provas (incluindo o salto em altura) o Boto chegou em segundo lugar.

3) Solução

Sejam: A = americanas; E = espanholas; O = ouro; P = prata; C = cobre; CE = cobre espanholas.

Evidentemente: $A + E = 588$ $O + P + C = 588$.

Como $O + P = 3C/4 \Rightarrow 3C/4 + C = 588 \Rightarrow 7C/4 = 588 \Rightarrow C = 336$.

$CE = 4C/7 = 4(336)/7 \Rightarrow CE = 192$.

Como entre as moedas de cobre e moedas americanas tem-se 360 $\Rightarrow A + CE = 360 \Rightarrow A + 192 = 360 \Rightarrow A = 168$.

∴ $A + E = 588 \Rightarrow 168 + E = 588 \Rightarrow E = 420$ ∴ $E = O + C \Rightarrow 420 = O + 336 \Rightarrow O = 84$.

4) Solução:

a) Se n é par, $n = 2k$, temos que: $n^n = (2k)^{2k} = [(2k)^k]^2$ sempre é quadrado.

Assim, como $1 \leq n \leq 100$, temos 50 valores de n pares.

Se n é ímpar, $n = 2k + 1$, temos que: $n^n = (2k + 1)^{2k+1} = [(2k + 1)^k]^2 \cdot (2k + 1)$ é quadrado perfeito somente quando $n = 2k + 1$ é quadrado perfeito.

Deste modo, somente $1^2, 3^2, 5^2, 7^2$ e 9^2 satisfazem o enunciado.

Portanto, existem 55 termos da sequência a_n , $1 \leq n \leq 100$, que são quadrados perfeitos.

b) Cálculos simples nos levam a:

$$1^1 = 1, 2^2 = 4, 3^3 = \dots 7, 4^4 = \dots 6, 5^5 = \dots 5, 6^6 = \dots 6, 7^7 = \dots 3, 8^8 = \dots 6, 9^9 = \dots 9.$$

Assim, o dígito das unidades de $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9$ é igual ao dígito das unidades de $1 + 4 + 7 + 6 + 5 + 6 + 3 + 6 + 9 = 47$, ou seja, igual a 7.

c) Seja d_n o algarismo das unidades de n . Inicialmente notemos que o algarismo das unidades de n^n é igual ao algarismo das unidades de d_n^n .

Sabemos que se n acaba em 1, então n^n também acaba em 1. Da mesma forma, se n acaba em 5 então n^n acaba em 5 e se n acaba em 6 então n^n também acaba em 6.

▪ Analisemos os números n que acabam em 2:

$$2^2 = 4, 2^4 = \dots 6, 2^6 = \dots 4, 2^8 = \dots 6, 2^{10} = \dots 4, 2^{12} = \dots 6, 2^{22} = \dots 4, 2^{32} = \dots 6$$

Portanto, se o dígito das dezenas de n é par então n^n acaba em 4 e se o dígito das dezenas de n é ímpar então n^n acaba em 6.

▪ Analisemos os números n que acabam em 3:

$$3^3 = \dots 7, 3^5 = \dots 3, 3^7 = \dots 7, 3^9 = \dots 3, 3^{11} = \dots 7, 3^{13} = \dots 3, 3^{23} = \dots 7, 3^{33} = \dots 3$$

Portanto, se o dígito das dezenas de n é par então n^n acaba em 7 e se o dígito das dezenas de n é ímpar então n^n acaba em 3.

▪ Analisemos os números n que acabam em 4:

$$4^4 = \dots 6, 4^6 = \dots 6, 4^8 = \dots 6,$$

Portanto, n^n sempre acaba em 6.

▪ Analisemos os números n que acabam em 7:

$$7^7 = \dots 3, 7^9 = \dots 7, 7^{11} = \dots 3, 7^{13} = \dots 7, 7^{15} = \dots 3, 7^{17} = \dots 7, 7^{27} = \dots 3, 7^{37} = \dots 7$$

Portanto, se o dígito das dezenas de n é par então n^n acaba em 3 e se o dígito das dezenas de n é ímpar então n^n acaba em 7.

▪ Analisemos os números n que acabam em 8:

$$8^8 = \dots 6, 8^{10} = \dots 4, 8^{12} = \dots 6, 8^{14} = \dots 4, 8^{16} = \dots 6, 8^{18} = \dots 4, 8^{28} = \dots 6, 8^{38} = \dots 4$$

Portanto, se o dígito das dezenas de n é par então n^n acaba em 6 e se o dígito das dezenas de n é ímpar então n^n acaba em 4.

▪ Analisemos os números n que acabam em 9:

$$9^9 = \dots 9, 9^{11} = \dots 9, 9^{13} = \dots 9, 9^{15} = \dots 9$$

Portanto, n^n sempre acaba em 9.

A partir dos valores calculados acima, concluímos que podemos separar o somatório em duas partes:

i) algarismo das dezenas de n par: o algarismo das unidades da soma dos números em uma mesma dezena é igual ao algarismo das unidades da soma $1^1 + 2^2 + \dots + 9^9$ (item b), ou seja, igual a 7.

ii) algarismo das dezenas de n ímpar: o algarismo das unidades da soma dos números em uma mesma dezena é igual ao algarismo das unidades de $11^{11} + 12^{12} + \dots + 19^{19}$, que é igual ao algarismo das unidades de $1 + 6 + 3 + 6 + 5 + 6 + 7 + 4 + 9 = 47$, que é igual a 7.

Como dentro de $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{99} + a_{100}$ existem 5 dezenas com dígito das dezenas par e 5 com dígito das dezenas ímpar, o algarismo das unidades de S é igual ao algarismo das unidades de $5(7) + 5(7) = 70$, ou seja, o algarismo das unidades de S é igual a 0.

5) Solução:

Cada termo do lado esquerdo da igualdade pode ser representado por: $\frac{2n-k}{k+1} = \frac{2n+1}{k+1} - 1$.

Portanto:

$$\frac{2001}{2} - \frac{2000}{3} + \frac{1999}{4} - \frac{1998}{5} + \dots - \frac{2}{2001} + \frac{1}{2002} = \frac{2003}{2} - 1 - \frac{2003}{3} + 1 + \frac{2003}{4} - 1 - \dots + \frac{2003}{2002} - 1 = 2003 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{2002} \right) - 1$$

Como todos os termos positivos possuem denominadores pares, podemos escrever estes termos da seguinte forma:

$$\frac{1}{2k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{2001}{2} - \frac{2000}{3} + \frac{1999}{4} - \frac{1998}{5} + \dots - \frac{2}{2001} + \frac{1}{2002} &= 2003 \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{5} + \dots + \left(\frac{1}{1001} - \frac{1}{2002} \right) \right) - 1 = \\ &= -2003 \left(-1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2002} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1001} \right) \right) - 1 = 2002 - 2003 \left(\frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \frac{1}{1004} + \dots + \frac{1}{2002} \right) = \\ &= 2002 - \frac{2003}{1002} - \frac{2003}{1003} - \frac{2003}{1004} \dots - \frac{2003}{2002} = 2 - \frac{2003}{1002} + 2 - \frac{2003}{1003} + 2 - \frac{2003}{1004} \dots + 2 - \frac{2003}{2002} = \frac{1}{1002} + \frac{3}{1003} + \frac{5}{1004} + \dots + \frac{2001}{2002} \end{aligned}$$