III Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 1

1) Ralph estava fazendo uma multiplicação e por descuido apagou alguns algarismos da conta. Determine os valores de A, B, C e D que foram apagados na multiplicação abaixo:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ \times & & & 7 \\ \hline D & 6 & 3 & 8 \end{array}$$

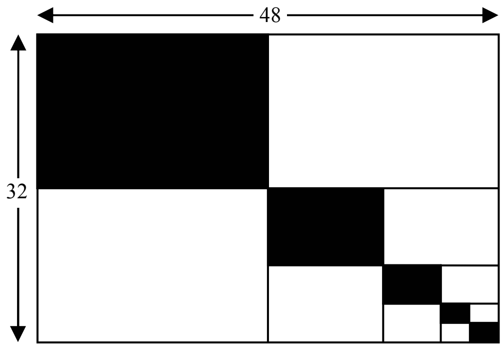
2) Numa lição de casa havia um exercício que pedia o quociente e o resto de muitas divisões. O aluno, com preguiça, resolveu fazer tudo com o auxílio de uma calculadora. Apareceram coisas assim:

$\frac{51}{12} = 4{,}25$; $\frac{97}{8} = 12{,}125$; $\frac{32}{5} = 6{,}4$.

Como pode aluno, sem efetuar as divisões e ainda usando somente a calculadora, saber qual é o quociente e o resto?

3) Num conjunto de 30 pessoas, 5 são altas e gordas, 11 são baixas e 13 são gordas. Quantas são altas e magras? Quantas são as baixas e magras?

4) Considere um retângulo cujos lados são iguais a 48 e 32. A partir deste retângulo construímos outros retângulos interiores menores cujos lados são iguais a metade dos lados do retângulo sobre o qual eles são construídos. Por exemplo, o retângulo preto maior possui lados 24 e 16. Determine a soma das áreas em preto.



5) Em um programa de televisão, duas brincadeiras são feitas com uma famosa atriz. Em cada uma delas existem três caixas, sendo que uma caixa contém quatro maçãs, outra contém quatro pêras e a última contém duas maçãs e pêras.

a) Na primeira brincadeira é colocada uma venda nos olhos da atriz, as caixas são trocadas de lugar e ela é convidada a retirar frutas das caixas. Qual deve ser a quantidade mínima de frutas que a atriz deve retirar para garantir que pelo menos uma pêra seja retirada das caixas?

b) Na segunda brincadeira a venda é retirada dos seus olhos e são utilizadas três etiquetas (MAÇÃS, PÊRAS e MAÇÃS E PÊRAS), cada etiqueta fixada em uma caixa, indicando seu conteúdo teórico, entretanto é informado à atriz que nenhuma etiqueta está indicando corretamente o verdadeiro conteúdo das caixas. Se for permitido que ela possa retirar apenas uma fruta de uma das caixas (a caixa a atriz escolhe), explique o raciocínio que a atriz deve adotar para determinar com certeza como devem ser colocadas corretamente as etiquetas nas caixas. Exemplifique.

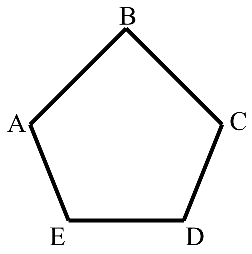
III Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 2

1) Seja ABC um triângulo que possui $\angle BAC = 36^o$ e $\angle ABC = 21^o$. Sobre o lado AB marcam-se os pontos D e E de modo que AD = DC e EB = EC. Determinar a medida do ângulo $\angle DCE$.

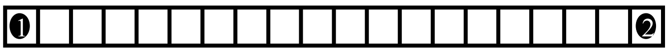
2) O dígito 3 é escrito à direita de um número de dois dígitos, formando assim um número de três dígitos. O novo número é 777 unidades a mais que o número original de dois dígitos. Qual é o número original?

3) Um pentágono ABCDE possui o ângulo B igual a 90^o, AB = BC, CD = EA, DE = 1 e AC = 2. Se AC e ED são paralelos e a distância entre eles é igual a 2, determine a área do pentágono.



4) Entre os jogos da Copa do Mundo, os jogadores brasileiros procuravam diversas formas de passar o tempo. Ronaldo, Rivaldo, Roberto Carlos, Cafu, Marcos e Roque Jr. resolveram disputar um campeonato de dominó, que teve a duração de cinco dias. Cada jogador jogou contra cada outro exatamente uma vez. Três jogos eram disputados simultaneamente durante cada um dos cinco dias. No primeiro dia, Rivaldo ganhou de Ronaldo. No segundo dia, Rivaldo ganhou novamente, agora de Roberto Carlos. No terceiro dia, Roberto Carlos ganhou de Marcos. No quarto dia, Ronaldo ganhou de Cafu. Determine quem jogou contra Roque Jr. no quinto dia.

5) Dois jogadores participam de um jogo, onde temos, inicialmente, uma ficha colocada em cada extremidade de uma fila de 20 casas. O jogador 1, que inicia o jogo, pode mover a ficha 1 uma ou duas casas para a direita, e o jogador 2 pode mover a ficha 2 uma ou duas casas para a esquerda. Uma ficha não pode saltar sobre a outra. O jogador que não conseguir mais mover sua ficha perde. Sabendo que os jogadores jogam alternadamente, determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora e diga como este jogador pode proceder nas escolhas de modo a garantir sua vitória.



III Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 3

1) Um joalheiro tem três caixas, contendo cada uma pedras preciosas com mesmo valor por caixa. Com o mesmo dinheiro, uma pessoa pode adquirir 28 pedras da primeira, ou 42 pedras da segunda ou 75 pedras da terceira. Por R\$ 1967 um freguês compra 1 pedra da primeira caixa, 3 da segunda e 2 da terceira. Quanto custa cada pedra da segunda caixa?

2) Seja d(n) o número de divisores positivos de n. Por exemplo, como os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12, então d(12) = 6.

a) Determine todos os inteiros positivos n tais que d(n) é ímpar.

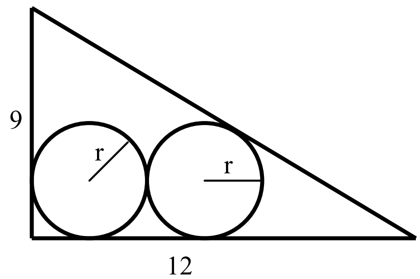
b) Determine se d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(2002) é par ou ímpar.

c) Caracterize todos os inteiros positivos n tais que d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(n) é par.

3) Determine de quantas maneiras é possível percorrer as letras no diagrama abaixo de modo que as letras escolhidas formem a palavra BELÉM. É permitido somente mover-se na horizontal (esquerda ou direita) e na vertical (para cima ou para baixo).

```
            M
          M É M
        M É L É M
      M É L E L É M
    M É L E B E L É M
      M É L E L É M
        M É L É M
          M É M
            M
```

4) Calcule o valor de r.



5) Seja f(n) uma função definida nos números inteiros positivos. Sabe-se que:

i) f(f(n)) = 4n + 9 para todo inteiro positivo n;

ii) $f(2^k) = 2^{k+1} + 3$ para todo inteiro não negativo k.

a) Determine o valor de f(25);

b) Determine o valor de f(1789).

III Olimpíada Paraense de Matemática

Soluções – Segunda Fase – Nível 1

1) Solução:
Claramente C vale 4 pois na tabuada de 7 o único número com algarismo das unidades igual a 8 é 7.4 = 28.
Analogamente temos 7B + 2 terminando em 3, ou seja, 7B terminando em 1, implicando que B = 3.
Novamente 7A + 2 termina em 6, implicando que 7A termina em 4, fazendo com que A = 2.
Finalmente D é o dígito das dezenas de 7A, ou seja, D = 1.

2) Solução:
Pela divisão euclidiana sabemos que $a = b.q + r \quad (0 \le r < b - 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \quad (0 \le r/b < 1)$
Assim, o quociente é a parte inteira de a/b e o resto é obtido multiplicando a parte fracionária de a/b por b.

3) Solução:
Sejam: AG = altas e gordas; AM = altas e magras; BG = baixas e gordas; BM = baixas e magras.
Pelos dados do enunciado: AG = 5; BG + BM = 11; AG + BG = 13.
Assim: $5 + BG = 13 \Rightarrow BG = 8 \Rightarrow 8 + BM = 11 \Rightarrow BM = 3$.
$\therefore AG + AM + BG + BM = 30 \Rightarrow 5 + AM + 8 + 3 = 30 \Rightarrow 14$.

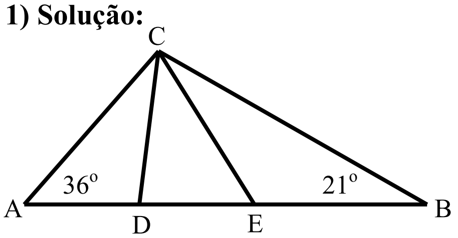
4) Solução:
Os lados do maior retângulo preto são 24 e 16 $\Rightarrow S_1 = 24.16 = 384$
Os lados do segundo maior retângulo preto são 12 e 8 $\Rightarrow S_2 = 12.8 = 96$
Os lados do terceiro maior retângulo preto são 6 e 4 $\Rightarrow S_3 = 6.4 = 24$
Os lados dos dois menores retângulos pretos são 3 e 2 $\Rightarrow S_4 = 6$
Portanto, a área total em preto é $S = S_1 + S_2 + S_3 + 2.S_4 \Rightarrow S = 516$

5) Solução:
a) A atriz deve retirar no mínimo sete frutas, uma vez que existem seis maçãs no total.
b) Basta retirar uma fruta da caixa escrita "MAÇÃS E PÊRAS". Como esta etiqueta está errada, a fruta que sair determina a etiqueta correta desta caixa. Suponhamos que seja retirada uma maçã. Assim, na caixa com etiqueta "PÊRAS E MAÇÃS" o correto é "MAÇÃS". Como as outras etiquetas também estão incorretas, na caixa com etiqueta "MAÇÃS" o correto é "PÊRAS" e na caixa com etiqueta "PÊRAS" o correto é "PÊRAS E MAÇÃS".

III Olimpíada Paraense de Matemática

Soluções – Segunda Fase – Nível 2

1) Solução:



$180^o = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 36^o + 21^o + \angle ACB \Rightarrow \angle ACB = 123^o$
ΔADC é isósceles $\Rightarrow \angle ACD = \angle CAD = 36^o$
ΔBEC é isósceles $\Rightarrow \angle BCE = \angle CBE = 21^o$
$\angle DCE = \angle ACB - \angle ACD - \angle BCE = 123^o - 36^o - 21^o \Rightarrow \angle DCE = 66^o$

2) Solução:
Seja n o número original, ou seja n = [ab] = 10a + b. Note que [ab3] = 100a + 10b + 3 = 10(10a + b) + 3 = 10n + 3
Portanto: $[ab3] = [ab] + 777 \Rightarrow 10n + 3 = n + 777 \Rightarrow 9n = 774 \Rightarrow n = 86$

3) Solução:
ΔABC é retângulo isósceles $\Rightarrow AB = BC = \sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = (AB.BC)/2 = 2$
$S_{ACDE} = \frac{(AC + ED).h}{2} = \frac{(2+1).2}{2} = 3$. Portanto, a área de ABCDE é $S = S_{ABC} + S_{ACDE} = 5$

4) Solução:

Com os dados do problema é possível descobrir as quatro primeiras rodadas do campeonato:

1º Dia	Rivaldo	x	Ronaldo
	Roberto Carlos	x	Cafu
	Marcos	x	Roque Jr.
2º Dia	Rivaldo	x	Roberto Carlos
	Ronaldo	x	Marcos
	Cafu	x	Roque Jr.
3º Dia	Roberto Carlos	x	Marcos
	Rivaldo	x	Cafu
	Ronaldo	x	Roque Jr.
4º Dia	Ronaldo	x	Cafu
	Rivaldo	x	Marcos
	Roberto Carlos	x	Roque Jr.

Assim, Roque Jr. joga contra Rivaldo no 5º dia.

5) Solução:
O jogador 2 possui uma estratégia vencedora. Basta ele proceder da seguinte maneira:
– Se o jogador 1 mover sua ficha em uma casa então o jogador 2 move sua ficha em duas casas;
– Se o jogador 1 mover sua ficha em duas casas então o jogador 2 move sua ficha em uma casa.
Assim, em cada rodada exatamente três casas são eliminadas do caminho entre as fichas 1 e 2. Como existem inicialmente 18 casas neste caminho, depois de seis rodadas completas as fichas 1 e 2 estarão em casas adjacentes, sendo a vez de jogar do jogador 1, que perde o jogo.

III Olimpíada Paraense de Matemática

Soluções – Segunda Fase – Nível 3

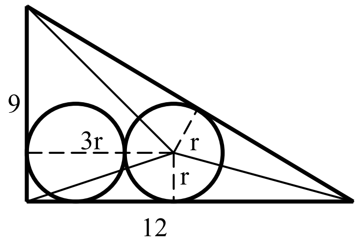
1) Solução:
Suponhamos que x, y e z são os preços das pedras nas 1ª, 2ª e 3ª caixas, respectivamente. Portanto temos que:
28.x = 42.y = 75.z = valor pago total.

Para comprar a quantidade desejada: $1967 = 1.x + 3.y + 2.z \Rightarrow 1967 = \frac{42.y}{28} + 3.y + \frac{2.42.y}{50} = \frac{281.y}{50} \Rightarrow$ y = R$ 350,00

2) Solução:
a) Sabemos que se n é dado na forma canônica $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ então $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_r + 1)$.
Para que d(n) seja ímpar então cada termo $a_i + 1$ deve ser ímpar, implicando que a_i é sempre par.
Como os expoentes de cada p_i na fatoração de n é par, então uma condição necessária e suficiente para que d(n) seja ímpar é que n seja um quadrado perfeito.
b) Se n não é um quadrado perfeito então d(n) é par. Como $44^2 < 2002 < 45^2$, então entre 1 e 2002 existem 44 quadrados perfeitos. Assim, a expressão d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(2002) é composto de 44 termos ímpares e 1948 termos pares. Como existe uma quantidade par de termos ímpares, então d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(2002) é par.
c) Pelo raciocínio do item anterior, d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(n) vai ser par quando existir um número par de termos d(k) ímpares, ou seja, quando existir entre 1 e n uma quantidade par de quadrados perfeitos. Em outras palavras, d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(n) vai ser par quando a parte inteira do número $\sqrt{n}$ for par.

3) Solução:
Partindo de B, temos 4 possibilidades para escolher E. De cada E temos 3 possibilidades para escolher L.
Separemos agora em dois casos para L:
i) L na linha ou coluna centrais: existem 3 possibilidades para escolher É;
ii) caso contrário: existem 2 possibilidades para escolher É.
Separemos também em dois casos para É:
i) É na linha ou coluna centrais: existem 3 possibilidades para escolher M;
ii) caso contrário: existem 2 possibilidades para escolher M.
O total de maneiras é: 4.[2.4 + 2.2 + 3] = 4.15 = 60

4) Solução:



Pelo Teorema de Pitágoras a hipotenusa do triângulo vale $\sqrt{9^2+12^2}=15$. Divida o triângulo retângulo em 3 triângulos menores, unindo o centro da circunferência tangente à hipotenusa aos vértices do triângulo. A área do triângulo retângulo pode ser calculada de duas maneiras:

$$\frac{9.12}{2}=\frac{9.3r}{2}+\frac{12.r}{2}+\frac{15.r}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

5) Solução:

a) Observe inicialmente que $4n + 9 = 2(2n + 3) + 3$.

Perceba gora que: $25 = 2.11 + 3$ e $11 = 2.4 + 3$.

$\therefore k = 2$ em ii) $\Rightarrow$ $f(4) = 8 + 3 = 11$.

$\therefore n = 4$ em i) $\Rightarrow$ $f(f(4)) = 16 + 9 = 25$ $\Rightarrow$ $f(11) = 25$.

$\therefore n = 11$ em i) $\Rightarrow$ $f(f(11)) = 44 + 9 = 53$ $\Rightarrow$ $f(25) = 53$.

b) Continuando com o mesmo raciocínio:

$1789 = 2.893 + 3$	$893 = 2.445 + 3$	$445 = 2.221 + 3$
$221 = 2.109 + 3$	$109 = 2.53 + 3$	$53 = 2.25 + 3$

$\therefore n = 25$ em i) $\Rightarrow$ $f(f(25)) = 109$ $\Rightarrow$ $f(53) = 109$

$\therefore n = 53$ em i) $\Rightarrow$ $f(f(53)) = 221$ $\Rightarrow$ $f(109) = 221$

$\therefore n = 109$ em i) $\Rightarrow$ $f(f(109)) = 445$ $\Rightarrow$ $f(221) = 445$

$\therefore n = 221$ em i) $\Rightarrow$ $f(f(221)) = 893$ $\Rightarrow$ $f(445) = 893$

$\therefore n = 445$ em i) $\Rightarrow$ $f(f(445)) = 1789$ $\Rightarrow$ $f(893) = 1789$

$\therefore n = 893$ em i) $\Rightarrow$ $f(f(893)) = 3581$ $\Rightarrow$ $f(1789) = 3581$