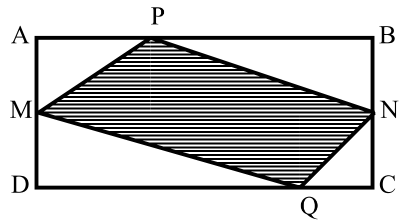
II Olimpíada Paraense de Matemática

Segunda Fase – Nível 2

29/09/2001

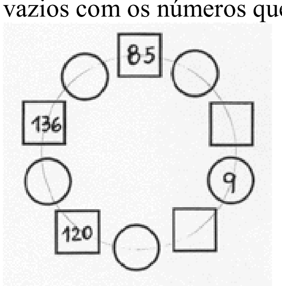
1) Crie expressões matemáticas para obter os números 1, 2, 3, ..., 10 usando cada um dos dígitos 1, 9, 9 e 7. Note que os dígitos devem aparecer separadamente. Somente as operações básicas +, –, x, ÷ e parênteses (se necessário) são permitidas. Outros símbolos matemáticos, como $\sqrt{\ }$ não são permitidos. Por exemplo, 11 e 12 podem ser representados das seguintes formas: $11 = 9 + 9 - (1 \times 7)$ $\quad 12 = 9 + 9 + 1 - 7$.

2) ABCD é um retângulo, M e N são os pontos médio dos lados AD e BC, respectivamente. P é um ponto sobre o lado AB que pode ocupar qualquer posição sobre este lado. Analogamente, Q é um ponto sobre o lado CD, que também pode andar sobre este lado. Determine quais devem ser as posições de P e Q sobre seus segmentos suportes de modo que a área do quadrilátero MPNQ seja máxima.



3) Um triângulo ABC é tal que $\angle B\hat{A}C = 90^o$. Traçam-se a mediana AM, a bissetriz AK e a altura AH. Prove que $\angle M\hat{A}K = \angle K\hat{A}H$.

4) André escreveu um número inteiro em cada círculo e depois escreve em cada quadrado o resultado da multiplicação dos números que estavam nos dois círculos vizinhos. Alguns dos números foram apagados. Complete os quadrados e círculos vazios com os números que foram escritos por André.



5) Existe um inteiro positivo escrito em cada casa de um tabuleiro 4x4, como está indicado na figura abaixo. Dois movimentos são permitidos:

i) movimento 1: multiplicar por 2 todos os 4 números pertencentes a uma mesma linha (horizontal);
ii) movimento 2: subtrair 1 de todos os 4 números pertencentes a uma mesma coluna (vertical).

Justifique os seguintes itens:

a) Aplicando estes movimentos permitidos várias vezes, mostre como é possível obter outro número igual a 1 na primeira coluna, em qualquer uma das outras 3 casas.
b) Aplicando estes movimentos permitidos várias vezes, mostre como é possível obter todos os 4 números da primeira coluna iguais a 1.
c) Aplicando estes movimentos permitidos várias vezes, mostre como é possível obter todos os 16 números escritos no tabuleiro iguais a zero. Neste item não é necessário descrever a quantidade de movimentos para transformar o número de cada casa em 1, somente descreva a estratégia a ser usada para as outras colunas.

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

II Olimpíada Paraense de Matemática

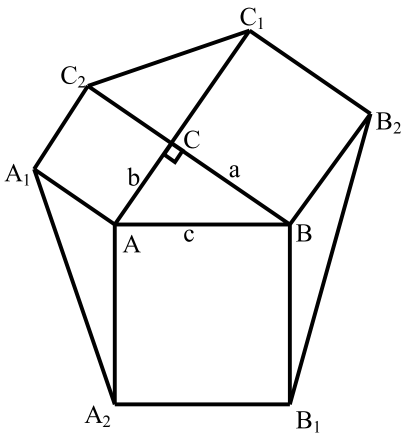
Segunda Fase – Nível 3

29/09/2001

1) Determinar todos os números de quatro dígitos n = 1*a*7*b* que são múltiplos de 15. (*a* e *b* são dígitos não necessariamente distintos)

2) Um pacote com 100 bombons deve ser dividido entre 15 garotos.
a) Prove que existem dois garotos que receberam a mesma quantia de bombons.
b) Qual o número mínimo de bombons no pacote, de modo que, depois divididos entre os 15 garotos, é possível que não existam dois garotos que receberam a mesma quantia de bombons.
Obs: Considere que algum garoto pode receber zero bombons.

3) Um triângulo retângulo ABC com lados a, b, c ($c^2 = a^2 + b^2$) determina um hexágono cujos vértices são os vértices externos dos quadrados construídos sobre os lados AB, BC e CA. Determine a área deste hexágono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ em termos de a e b.



4) Este jogo inicia com o número 1 escrito em um quadro negro. Alternadamente, dois jogadores multiplicam o número original por algum inteiro pertencente ao conjunto {2, 3, ..., 9}. Após a multiplicação, o jogador apaga o número original e escreve no lugar o resultado da multiplicação. O jogador que primeiro escrever um número maior que 1000 vence. Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora (o que inicia o jogo ou o segundo a jogar) e diga como este jogador pode proceder nas escolhas de modo a garantir sua vitória.

5) Um tabuleiro 4x4 possui, inicialmente, todas as casas pintadas de branco, como indicado na figura 1. Uma operação permitida é escolher um retângulo consistindo de 3 casas e pintar cada uma das casas da seguinte forma:
– se a casa é branca então pinta-se de preto;
– se a casa é preta então pinta-se de branco.
Dois exemplos de possíveis escolhas sucessivas são dadas nas figuras 2 e 3.
a) Mostre, aplicando várias vezes a operação permitida, como conseguir que o tabuleiro fique pintado como na figura 4.
b) Mostre, aplicando várias vezes a operação permitida, como conseguir que o tabuleiro fique pintado como na figura 5.
c) Prove que, aplicando várias vezes a operação permitida, é impossível conseguirmos que todo o tabuleiro fique pintado de preto.

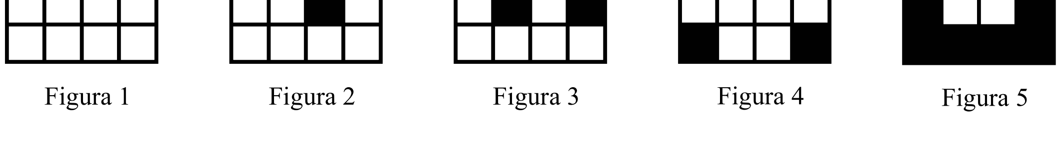


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

II Olimpíada Paraense de Matemática

Soluções – Segunda Fase – Nível 2

1) Solução:

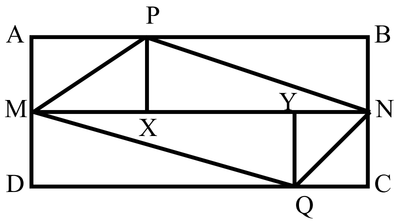
Existem várias possibilidades para os números. Abaixo algumas delas:

1 = 7 x (9 – 9) + 1
2 = (9 + 7) ÷ (9 – 1)
3 = 9 ÷ (9 + 1 – 7) = (9 + 9) ÷ (7 – 1)
4 = (9 – 1) ÷ (9 – 7)
5 = (9 + 1) ÷ (9 – 7) = 7 – (9 ÷ 9) – 1 = (9 x 7) ÷ 9 – 1
6 = 9 – 9 + 7 – 1
7 = 9 – 9 + 7 ÷ 1 = (9 – 9) x 1 + 7 = (9 ÷ 9) + 7 – 1 = (9 ÷ 9) x 1 x 7
8 = 9 – 9 + 7 + 1 = (9 ÷ 9) + (7 ÷ 1) = (9 x 7) ÷ 9 + 1
9 = 9 ÷ 9 + 7 + 1
10 = 9 + 9 – 7 – 1

2) 1ª Solução:

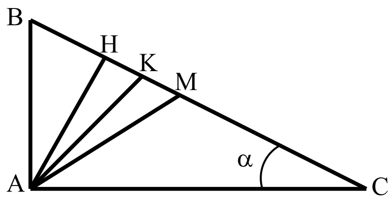
Note que MN é paralelo a AB e DC, sendo MN = AB = DC.
Separando o quadrilátero MPNQ nos triângulos MPN e MNQ, temos que:
$S_{MPNQ} = MN.h_1/2 + MN.h_2/2 = MN(h_1 + h_2)/2 = AB.AD/2$ que é igual a metade da área do retângulo
Ou seja, para qualquer posição de P e Q, temos que a área do quadrilátero MPNQ é constante.

2ª Solução:



Note que MN é paralelo a AB e DC, sendo MN = AB = DC. Notemos também que os triângulos ΔMAP e ΔPXM possuem a mesma área, sendo que um está dentro do quadrilátero MPNQ e o outro está fora. O mesmo acontece com os triângulos ΔPXN e ΔPBM, também com os triângulos ΔMYQ e ΔMDQ e finalmente também com os triângulos ΔNYQ e ΔNCQ. Notemos que quando somamos as áreas dos triângulos ΔPXM, ΔPXN, ΔMYQ e ΔNYQ obtemos a área do quadrilátero MPNQ. Entretanto, para cada área interior ao quadrilátero temos uma área igual fora do quadrilátero, implicando que a área do quadrilátero é igual a metade da área do retângulo ABCD, independente da posição de P e Q.

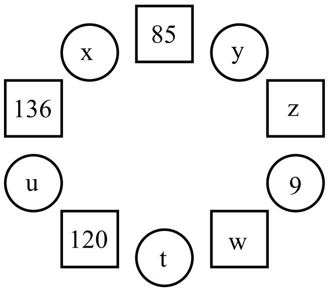
3) Solução:



Desde que AM é a mediana relativa ao vértice A e como A = 90º, então AM = MC.
Assim, o triângulo AMC é isósceles, implicando que ∠MAC = α.
Como ∠KAC = 45º ⇒ ∠MAK = 45º – α. Como ∠ABC = 90º – α ⇒ ∠BAH = α.
Portanto, sendo 45º = ∠KAB = ∠BAH + ∠KAH ⇒ 45º = α + ∠KAH ⇒ ∠KAH = 45º – α = ∠MAK.

4) Solução:

$x.y = 85 = 5.17$ $x.u = 136 = 2^3.17$ $t.u = 120 = 2^3.3.5$



Como 17 é comum a x.y e x.u, e 17 não divide t.u, então $x = 17$.
Se x é 17 $\Rightarrow$ $y = 5$ e $u = 8$ $\Rightarrow$ $t = 15$
Desde que $w = 9t$ $\Rightarrow$ $w = 135$
Como $z = 9y$ $\Rightarrow$ $z = 45$

5) Solução:

a) Aplicar o movimento 1 na 1ª linha, depois o movimento 2 na 1ª coluna. Deste modo teremos os dois primeiros termos da 1ª coluna iguais a 1.
b) A idéia é a mesma. Temos agora os números 1, 1, 2 e 3 na 1ª coluna. Para conseguir 1 na 3ª casa da 1ª coluna basta aplicar o movimento 1 na 1ª e na 2ª linhas e depois o movimento 2 na 1ª coluna. Agora temos os números 1, 1, 1 e 2. Para conseguir na última casa basta aplicar o movimento 1 na 1ª, 2ª e 3ª linhas e depois o movimento 2 na 1ª coluna.
c) Como já temos a 1ª coluna sendo formada somente por 1's, basta aplicar nesta o movimento 2 para conseguir a 1a coluna sendo formada somente por 0's. A estratégia, para cada uma das outras colunas (uma de cada vez), é, inicialmente, fazer aparecer 1 em alguma das casas, aplicando para isso seguidamente o movimento 2. Depois que apareça uma casa com 1 escrito, basta fazer como nos itens a) e b), aplicando várias vezes o movimento 1 nas linhas que contem uma casa com 1 escrito e depois aplicando uma vez o movimento 2. Depois de conseguir outra coluna somente com 1's, basta aplicar o movimento 2 nesta coluna, obtendo assim uma outra coluna formada somente de 0's. Note também que assim as colunas anteriores já determinadas somente com 0's não são alteradas.

II Olimpíada Paraense de Matemática

Soluções – Segunda Fase – Nível 3

1) Solução:

Desde que 15 = 3.5, temos aplicar os critérios de divisibilidade por 3 e 5.
Para que $n = 1a7b$ seja divisível por 5, b deve ser igual a 0 ou 5:
i) $b = 0 \Rightarrow n = 1a70$
Para que n seja divisível por 3 temos que a soma dos dígitos de n deve ser divisível por 3:
$\therefore 1 + a + 7 + 0 = 8 + a = 3k$
se $k \leq 2 \Rightarrow 8 + a \leq 6 \Rightarrow a \leq -2$, que não é dígito
se $k = 3 \Rightarrow 8 + a = 9 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow n = 1170$
se $k = 4 \Rightarrow 8 + a = 12 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow n = 1470$
se $k = 5 \Rightarrow 8 + a = 15 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow n = 1770$
se $k \geq 6 \Rightarrow 8 + a \geq 18 \Rightarrow a \geq 10$, que não é dígito
ii) $b = 5 \Rightarrow n = 1a75$
Para que n seja divisível por 3 temos que a soma dos dígitos de n deve ser divisível por 3:
$\therefore 1 + a + 7 + 5 = 13 + a = 3k$
se $k \leq 4 \Rightarrow 13 + a \leq 12 \Rightarrow a \leq -1$, que não é dígito
se $k = 5 \Rightarrow 13 + a = 15 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow n = 1275$
se $k = 6 \Rightarrow 13 + a = 18 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 1575$
se $k = 7 \Rightarrow 13 + a = 21 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow n = 1875$
se $k \geq 8 \Rightarrow 13 + a \geq 24 \Rightarrow a \geq 11$, que não é dígito
Portanto, todos os números são 1170, 1470, 1770, 1275, 1575, 1875.

2) Solução:

a) Vamos tentar fazer uma distribuição utilizando a menor quantidade de bombons possível:

garoto 1: recebe 0 bombons	garoto 2: recebe 1 bombom	garoto 3: recebe 2 bombons
garoto 4: recebe 3 bombons	....	garoto 14: recebe 13 bombons

Somando a quantidade de bombons já distribuída, temos um total de 91 bombons, implicando que ainda existem 9 bombons para serem distribuídos e ainda temos o garoto 15 que ainda não recebeu bombons. Porém, como 9 < 14, este último garoto vai necessariamente receber um quantidade de bombons que é igual a uma quantidade já distribuída para algum dos outros garotos.
b) Para fazer com que este garoto 15 receba uma quantidade de bombons diferente de qualquer quantidade já distribuída (que são os inteiros 0, 1, 2, ..., 13), devemos dar pelo menos 14 bombons para este último garoto, implicando que seriam necessários no mínimo 91 + 14 = 105 bombons no total.

3) Solução:

Algumas das áreas podem ser calculadas diretamente:
i) triângulo $\Delta ABC = ab/2$ ii) quadrado $\square BCC_1B_2 = a^2$ iii) quadrado $\square ACC_2A_1 = b^2$
iv) quadrado $\square ABB_1A_2 = c^2 = a^2 + b^2$ v) triângulo $\Delta CC_1C_2 = ab/2$
Falta calcular as áreas dos triângulos ΔAA_1A_2 e ΔBB_1B_2.
Note que $\angle A_1\hat{A}A_2 + \angle C\hat{A}B = 180^o$, fazendo com que sen $(\angle A_1\hat{A}A_2)$ = sen $(\angle C\hat{A}B)$
Portanto, a área do triângulo ΔAA_1A_2 é igual a $(AA_1)(AA_2)(\text{sen }(\angle A_1\hat{A}A_2))/2 = bc(\text{sen }(\angle C\hat{A}B))/2 = (bc/2)(a/c) = ab/2$
Analogamente, a área do triângulo ΔBB_1B_2 é igual a $ab/2$.
Desta forma, a área do hexágono é igual a: $a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + ab/2 + ab/2 + ab/2 + ab/2 = 2a^2 + 2b^2 + 2ab$

4) Solução:

Digamos que A é o jogador que vence e B é o jogador que perde. Vamos analisar se A é o primeiro ou o segundo jogador. Note que para alcançar 1000 em sua última jogada, é necessário que em sua jogada anterior A escreva um número x que impeça que B multiplique x por algum inteiro n entre 2 e 9 de modo que $nx > 1000$.
Como 1000/9 = 111,11.. , então se, em sua jogada anterior, A escrever um número x menor ou igual a 111, B não poderá escrever um número maior que 1000, por mais que multiplique 111 por 9. Entretanto, para que A ganhe, é necessário que B escreva um número maior que 112. Desde que (111,11...)/2 = 55,55... , então se x for maior ou igual a 56, necessariamente B escreverá um número maior que 112, pois mesmo que multiplique pelo menor número (que é 2), teremos $nx \geq 112$.
Resumindo, para que A ganhe, basta que em sua jogada anterior ele consiga escrever um número x que satisfaça $56 \leq x \leq 111$, pois assim B vai ter que escrever um número entre 112 e 999, fazendo com que A ganhe.

Pelo mesmo raciocínio, para que A consiga escrever um número x tal que $56 \le x \le 111$, então na jogada anterior a esta, A deve escrever um número y que satisfaça $4 \le y \le 6$, uma vez que $111/9 = 12{,}33...$ e $(12{,}33...)/2 = 6{,}166...$. Em outras palavras, se A escrever um número entre 4 e 6, então B vai ter que escrever um número entre 8 e 54 (ou seja, fora do intervalo 56 a 111), fazendo com que A, na vez seguinte, possa escrever um número entre 56 e 111. Chegamos a conclusão, então, que para ganhar algum dos jogadores tem que escrever no quadro negro um dos número 4, 5 ou 6. Evidentemente, o primeiro jogador pode fazer esta escolha, fazendo com que o jogador A, que é o que ganha o jogo, seja o jogador que inicia o jogo.

5) Solução:

a) Numeremos as casas do tabuleiro da seguinte forma:

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Vamos designar as escolhas de cada retângulo pelos números contido neste. As escolhas devem ser as seguintes:
retângulo 1,5,9 $\rightarrow$ retângulo 5,9,13 $\rightarrow$ retângulo 4,8,12 $\rightarrow$ retângulo 8,12,16
Note que em qualquer seqüência que estes retângulos sejam escolhidos o resultado final é o mesmo.

b) Utilizando a situação do item anterior, as escolhas devem ser:
retângulo 3,7,11 $\rightarrow$ retângulo 7,11,15 $\rightarrow$ retângulo 2,6,10 $\rightarrow$ retângulo 6,10,14 $\rightarrow$ retângulo 5,6,7 $\rightarrow$ retângulo 6,7,8 $\rightarrow$ retângulo 9,10,11 $\rightarrow$ retângulo 10,11,12
Novamente destacamos que em qualquer seqüência que estes retângulos sejam escolhidos o resultado final é o mesmo.

c) Distribua as letras a, b, c no tabuleiro da seguinte forma:

a	b	c	a
c	a	b	c
b	c	a	b
a	b	c	a

Note que as letras estão alternadas tanto nas linhas quanto nas colunas. Esta alternância faz com que toda vez que um retângulo com 3 casas é selecionado, então exatamente uma letra a, uma letra b e uma letra c são selecionadas.
No início temos todas casas brancas e as quantidade de letras a, b, c são:
$a = 6 \quad b = 5 \quad c = 5$
Sejam: A a quantidade de casas brancas escritas a letra a, B a quantidade de casas brancas escritas a letra b e C a quantidade de casas brancas escritas a letra c.
No início temos: $A = 6 \quad B = 5 \quad C = 5$
Toda vez que selecionamos um retângulo formado de três casas, estamos somando a cada valor de A, B e C os valores + 1 ou – 1. Por exemplo, se selecionarmos 3 casas brancas (estas transformando-se em pretas) temos que $A = 6$, $B = 5$ e $C = 5$ transformam-se em $A = 5$, $B = 4$ e $C = 5$. Se depois disto selecionamos uma casa branca com a letra a, uma casa branca com a letra b e uma casa preta com a letra c, temos que $A = 5$, $B = 4$ e $C = 5$ transformam-se em $A = 4$, $B = 3$ e $C = 6$.
Perceba também que se todas casas ficarem pretas, então teremos $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$.
Entretanto, note que iniciando de $A = 6$, $B = 5$ e $C = 5$, e alterando simultaneamente por + 1 ou – 1 estes valores, sempre teremos entre os valores de A, B e C dois números ímpares e um par ou dois pares e um ímpar, implicando que sempre existirá um valor ímpar, fazendo com que a situação $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$ seja impossível, pois se assim ocorresse teríamos todos os valores de A, B e C pares.