Principio de Dirichlet ou da casa dos pombos. Se mais de n objetos (pombos) são dispostos em n classes (casas de pombo), pelo menos uma das classes (casas de pombo) possui mais de um objeto (pombo).

Princípio da divisão euclidiana. Se m e n são inteiros existem dois inteiros q e r tais que $m = nq + r$ e $0 \leq r < n$. Os números q e r são denominados, respectivamente, quociente e resto da divisão euclidiana de m por n.

Teorema de Bézout. Se a e b são inteiros e d é seu maior divisor comum então o menor valor positivo da expressão ax + by, onde x e y são inteiros quaisquer, é precisamente d.

Teorema Fatoração Única. Todo inteiro pode ser representado de modo único como o produto de números primos distintos, a menos da ordem dos fatores.

(Eötvös 1894/1) Prove que as expressões 2x + 3y e 9x + 5y são divisíveis por 17 para o mesmo conjunto de pares de valores inteiros x e y.
Solução. Observe a igualdade 4(2x + 3y) = 17(x + y) – (9x + 5y). Se 2x + 3y for divisível pelo 17, (9x + 5y) também será, e vice-versa.
Repare que estamos utilizando a importante regra: se um primo (no caso o 17) divide o produto de dois números (no caso são 4 e 2x + 3y) então ele divide pelo menos um dos números.
(Eötvös 1896/1) Prove que log n $\geq k \cdot \log 2$ onde k vale a quantidade de fatores primos distintos de n.
(Eötvös 1898/1) Determine todos os naturais n para os quais $2^n + 1$ é divisível por 3.
Dica. tente encontrar um seqüência periódica para os restos... essa dica vale para muitos problemas.
(Eötvös 1899/3) Prove que, para qualquer valor natural n, a expressão de A é divisível por 1897: $A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$.
Dica. quanto vale (a – b) multiplicado por $(a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1} + b^n)$?
(Eötvös 1900/1) Sejam a, b, c, d inteiros fixos, onde 5 não divide d. Assuma que existe um inteiro m para o qual $am^3 + bm^2 + cm + d$ é divisível por 5. Prove que existe um inteiro n para o qual 5 divide $dn^3 + cn^2 + bn + a$.

(Eötvös 1901/1) Prove que, sendo n um número natural, a expressão $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ é divisível por 5 se e somente se n não é divisível por 4.
(Eötvös 1901/3) Sejam a e b naturais cujo maior divisor comum é d. Prove que exatamente d dos números a, 2a, 3a, ..., (b – 1)a, ba são divisíveis por b.
(Eötvös 1902/3) Mostre que toda expressão quadrática $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$ pode ser reescrita na forma $Q(x) = k\dfrac{x(x-1)}{2} + lx + m$ onde k, l e m dependem dos coeficientes A, B e C. Demonstre, em seguida, que Q(x) assume valores inteiros para todo inteiro x se e somente se k, l, m são inteiros.
(Eötvös 1903/1) Seja $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, onde $2^p - 1$ é primo. Mostre que a soma dos divisores positivos (exceto n) de n é igual a n.
Curiosidade e Desafio. Um número natural n que é igual a soma de seus divisores positivos, excetuando-se o próprio, é dito ser um número perfeito. Até esta data (24/09/2002), ainda é um problema em aberto saber se existem números perfeitos ímpares. Se existir um tal número, ele deverá satisfazer uma quantidade surpreendente de condições, a maioria dos matemáticos acredita que não existem perfeitos ímpares. Não se sabe, também, se existem infinitos números perfeitos pares. Nosso desafio é o seguinte: você consegue demonstrar a recíproca do exercício da Eötvös, ou seja, que se n é um número perfeito par então ele pode ser escrito como $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ onde $2^p - 1$ é primo? A primeira demonstração deste fato é devida a Leonhard Euler. Você consegue encontrar alguma restrição para um número perfeito ímpar, ou seja, alguma condição que ele deveria satisfazer caso exista?
(Eötvös 1906/1) Seja $a_1, a_2, ..., a_n$ é um rearranjo arbitrário dos números 1,2,...,n. Prove que, se n é ímpar, o produto $(a_1 - 1)(a_2 - 2)...(a_n - n)$ resulta par.
Dica. Ímpar mais ímpar é par...
(Eötvös 1907/1) Se p e q são números ímpares, mostre que a equação $x^2 + 2px + 2q = 0$ não possui raízes x racionais.
(Eötvös 1907/3) Seja r/s = $0.k_1k_2k_3...$ a representação decimal de um número racional.

Prove que ao menos dois dos números $\sigma_1 = 10\frac{r}{s} - k_1, \sigma_1 = 10^2\frac{r}{s} - (10k_1 + k_2),...$ são iguais.

(Eötvös 1908/1) Dado dois ímpares a e b; prove que $a^3 - b^3$ é divisível por 2^n se e somente se a – b é divisível por 2^n.

(Eötvös 1909/1) Considere três números naturais consecutivos. Prove que o cubo do maior não pode ser igual à soma dos dois menores.

(Eötvös 1910/2) Sejam a, b, c, d e u inteiros tais que os números ac, bc + ad, bd são múltiplos de u. Mostre que bc e ad são múltiplos de u.

(Eötvös 1911/3) Prove que $3^n + 1$ não é divisível por 2^n para nenhum inteiro n > 1.

(Eötvös 1912/2) Prove que para todo inteiro positivo n, será um múltiplo de 8 o número $A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

(Eötvös 1913/3) Deixe d denotar o maior divisor comum dos naturais a e b, and d' denotar o mesmo dos naturais a' e b'. Prove que dd' é o maior divisor comum aos quatro números aa', ab', ba', bb'.

(Eötvös 1917/1) Se a e b são inteiros e as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} y - 2x - a = 0 \\ y^2 - xy + x^2 - b = 0 \end{cases}$$

são racionais, então elas próprias são inteiras.

(Eötvös 1917/2) No quadrado de um inteiro a, o dígito das dezenas é o sete. Qual é o dígito das unidades?

(Eötvös 1922/2) Prove que $x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ não é o produto de dois polinômios $x^2 + ax + b$ e $x^2 + cx + d$ onde c e d são inteiros.

(Eötvös 1923/3) Prove que, se os termos de uma progressão aritmética infinita de naturais não são todos iguais, eles não podem ser todos primos.

(Eötvös 1925/1) Sejam a, b, c, d quatro inteiros. Prove que o produto das seis diferenças b – a, c – a, d – a, d – c, d – b, c – b é divisível por 12.

(Eötvös 1925/2) Em quantos zeros termina a representação decimal do número 100! = 1 . 2 . 3 . ... . 100 ?

(Eötvös 1926/2) Prove que o produto de quatro naturais consecutivos não é um quadrado perfeito.

Dica. Some 1 ao produto dos quatro naturais começados por n e procure fatorar a expressão em termos de n.

(Eötvös 1927/1) Sejam a, b, c, d quatro inteiros relativamente primos com m = ad – bc. Prove que os pares de inteiros (x,y) para os quais ax + by é múltiplo de m são os mesmos pares para os quais cx + dy é múltiplo de m.

Segunda Fase, OBM – 2002, Nível 2

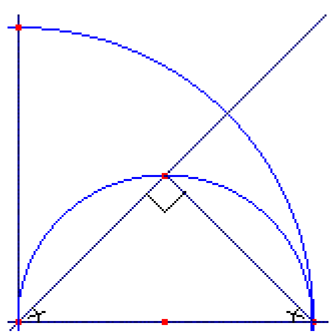
1) Geraldinho e Magrão saíram de suas casas no mesmo instante com a intenção de um visitar o outro, caminhando pelo mesmo percurso. Geraldinho ia pensando num problema de olimpíada e Magrão ia refletindo sobre questões filosóficas e nem perceberam quando se cruzaram. Dez minutos depois, Geraldinho chegava à casa de Magrão e meia hora mais tarde, Magrão chegava à casa de Geraldinho. Quanto tempo cada um deles andou?

Observação: Cada um deles anda com velocidade constante.

Solução. Geraldino percorreu a distância A em t minutos, enquanto Magrão percorreu uma distância B. Neste instante eles se encontraram. Em seguida: G. percorreu uma distância B em 10 minutos; e M., uma distância A em 40 minutos. As velocidades são constantes, portanto A/t = B/10 e B/t = A/40, donde conclui-se A/B = t/10 = 40/t, i.e., t = 20 min.

2) Um grande painel na forma de um quarto de círculo foi composto com 4 cores, conforme indicado na figura ao lado, onde o segmento divide o setor em duas partes iguais e o arco interno é uma semicircunferência. Qual é a cor que cobre a maior área?

Solução. Observe a figura abaixo. Os dois ângulos marcados com traços são iguais. Sabe-se que: um triângulo inscrito em uma circunferência é retângulo se e somente se tem um de seus lados como diâmetro. Calcula-se facilmente que a área da parte do oitavo do círculo maior vale a o mesmo que área do semicírculo menor, portanto as áreas Verde e Amarelas são iguais, segue-se que a área Azul e Branca são iguais e menores.



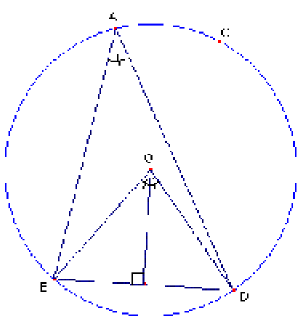
3) Nas casas de um tabuleiro 8 por 8 foram escritos números inteiros positivos de forma que a diferença entre números escritos em casas vizinhas (quadrados com um lado comum) é 1. Sabe-se que numa das casas está escrito 17 e, em outra, está escrito 3. Calcule a soma dos números escritos nas duas diagonais do tabuleiro.

Solução. A distância mínima entre duas diagonais, andando-se de casa em casa vizinha, é de 14 passos. Como 17 – 3 = 14 e 17 e 3 estão escritos, certamente eles estão em diagonais opostas. Em seguida preenche-se unicamente o tabuleiro, e calcula-se uma soma de 16 termos, igual a 160.

4) O professor Pardal está estudando o comportamento familiar de uma espécie de pássaro. Os pontos A, B, C e D da figura ao lado, representam a disposição de quatro ninhos desses pássaros. O professor construiu um posto de observação equidistante dos quatro ninhos.

Todos os ninhos e o posto de observação estão em um mesmo nível de altura a partir do solo, a distância de B a D é de 16 metros e $B\hat{A}D = 45°$. Determine a distância que o posto guarda de cada ninho.

Solução. Observe a figura abaixo. Um teorema clássico de geometria diz que o ângulo BÂD vale a metade do arco BD. Trace a altura relativa ao lado BD no triângulo OBD, isósceles e eqüilátero. No triângulo retângulo formado, vê-se que o raio da circunferência satisfaz $OB^2 = 8^2 + 8^2$. Portanto a distância pedida é $8\sqrt{2}$.



5) O primeiro número de uma seqüência é 7. O próximo é obtido da seguinte maneira:

Calculamos o quadrado do número anterior 72 = 49 e a seguir efetuamos a soma de seus algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número é 4 + 9 + 1 = 14. Repetimos este processo, obtendo 142 = 196 e o terceiro número da seqüência é 1 + 9 + 6 + 1 = 17 e assim sucessivamente. Qual o 2002º elemento desta seqüência?

Solução. Calculam-se os primeiros 8 termos: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5,... Há uma repetição de três em três a partir do quinto termo. Os termos de ordem múltipla de três, i.e., o sexto termo, o nono termo, etc. resultam em 8. Portanto o 2001-ésimo termo é o 8, logo o termo pedido é o 11.

6) O ano 2002 é palíndromo, ou seja, continua o mesmo se lido da direita para a esquerda.

a) Depois de 2002, quais serão os próximos quatro anos palíndromos?

b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?

c) O último ano palíndromo primo aconteceu há mais de 1000 anos, em 929. Determine qual será o próximo ano palíndromo primo.

Solução. a) os palíndromos são claramente 2112, 2222, 2332 e 2442;

b) todos os 2aa2 são pares, em seguida vem os 3aa3, ímpares, e 3003 é o primeira dessa lista;

c) os números de 4 dígitos palíndromos são abba = 1001a + 110b, e portanto são divisíveis por 11 pois 1001 e 110 são. Os primeiros palíndromos de 5 dígitos são 10001, 10101, 10201, 10301, etc. Por verificação direta, vemos que 10001 = 73.137, 10101 = 3.3367, 10201 = 101.101, e 10301 não é divisível por nenhum primo menor ou igual que sua raiz quadrada, portanto é primo e é a resposta.

Obs. Demonstre que se um número n é composto ele é divisível por um inteiro d que satisfaz $d \le \sqrt{n}$.

Segunda Fase, OBM – 1997, Júnior

1) No edificio mais alto de *Terra Brasilis* moram *Eduardo* e *Augusto*. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de *Augusto*. A soma dos números dos apartamentos dos dois é 2164. Calcule o número do apartamento de *Eduardo* sabendo que há 12 apartamentos por andar. (Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo, de 13 a 24, e assim por diante).

2) A professora de Matemática propôs o seguinte problema para seus alunos: "Marquem 6 pontos sobre uma circunferência. Eu quero que vocês pintem o maior número de cordas determinadas por estes pontos, de modo que não existam quatro dos pontos sobre a circunferência determinando um quadrilátero com todos os lados e diagonais coloridos."

a) *Edmilson* encontrou uma solução correta colorindo 12 cordas. Exiba uma maneira de como fazer isto;

b) Gustavo Afirmou ter encontrado uma solução na qual pintara 13 cordas. Mostre que a solução de *Gustavo* não está correta.

3) Sejam *ABCD* um quadrado, *M* o ponto médio de *AD* e *E* um ponto sobre o lado *AB*. *P* é a interseção de *EC* e *MB*. Mostre que a reta *DP* divide o segmento *EB* em dois segmentos de mesma medida.

4) Mostre que existem infinitos inteiros positivos *n* satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

a) *n* é ímpar;

b) *n* possui exatamente 1200 divisores positivos;

c) existem exatamente 1997 triângulos retângulos, dois a dois não congruentes, de lados inteiros e *n* como medida de um dos catetos.

5) Seja $n \geq 1$ um inteiro. Temos *n* lâmpadas alinhadas e numeradas, da esquerda para a direita, de 1 a *n*. Cada lâmpada pode estar acesa ou apagada. A cada segundo, determina-se a lâmpada apagada de maior número e inverte-se o estado desta (de acesa para apagada ou de apagada para acesa) e das lâmpadas posteriores (as lâmpadas de maior número).

a) Mostre que em algum momento todas as lâmpadas estarão acesas (e o processo se encerrará);

b) Suponha que inicialmente todas as lâmpadas estejam apagadas. Determine depois de quantos segundos todas as lâmpadas estarão acesas;

c) Suponha agora $n = 11$ e que no início somente as lâmpadas de números 6, 7 e 10 estejam acesas. Mostre que após exatamente 1997 segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

Terceira Fase, OBM – 1998, Nível 2

1) Prove que em qualquer pentágono convexo existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216°.

2) No triângulo *ABC*, *D* é o ponto médio de *AB* e *E* o ponto do lado *BC* tal que $BE = 2 \cdot EC$. Dado que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}E$ são iguais, encontre o ângulo $B\hat{A}C$.

3) Em um jogo existem 20 buracos vazios em fila e o jogador deve colocar um pino em cada buraco de acordo com as seguintes regras:

a) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem vazios, o pino permanece.

b) Se colocar um pino em um buraco e se um dos buracos vizinhos estiver ocupado, o pino deste buraco vizinho deve ser retirado.

c) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem ocupados, então um dos pinos vizinhos deve ser retirado.

Determine qual é o número máximo de pinos que podem ser colocados.

4) São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.

Dica. Pombos...!?

Terceira Fase, OBM – 1999, Nível 2

1) Seja ABCDE um pentágono regular tal que a estrela ACEBD tem área 1. Sejam P interseção entre AC e BE e Q a interseção entre BD e CE. Determine a área de APQD.

2) Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade A para a cidade B, que é a cidade do reino mais longe de A. Após um tempo, ele foi expulso da cidade B para a cidade C do reino mais longe de B. Sabe-se que a cidade C não é a mesma cidade A. Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade A?

Nota: as distâncias entre as cidades são todas diferentes.

3) Adriano, Bruno e Carlos disputaram uma série de partidas de tênis de mesa. Cada vez que um jogador perdia, era substituído pelo que estava a esperar. A primeira partida foi disputada por Adriano e Bruno. Sabe-se que Adriano venceu 12 partidas e Bruno 21. Quantas vezes Adriano e Bruno se enfrentaram?

4) Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a 1.000.000a. e a 3.000.000a. casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.

Dica. Prove, inicialmente, que $\sqrt{2}$ é irracional.