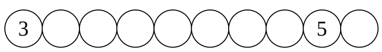
(OBM-1997) O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é: A) 2; B) 3; C) 6; D) 7; E) 9.

(OBM-1997) Se p e q são inteiros positivos tais que $\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15}$, o menor valor que q pode ter é: A) 6; B) 7; C) 25; D) 30; E) 60.

(OBM-1997) Em certo país a unidade monetária é o pau. Há notas de 1 pau e moedas de meio pau, um terço de pau, um quarto de pau e um quinto de pau. Qual a maior quantia, em paus, que um cidadão pode ter em moedas sem que possa juntar algumas delas para formar exatamente um pau?
A) $\frac{11}{12}$; B) $1\frac{5}{12}$; C) $2\frac{7}{15}$; D) $2\frac{13}{60}$; E) $2\frac{43}{60}$.

(OBM-1997) Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25? A) 2; B) 4; C) 6; D) 8; E) 10

(OBM-1998) Escreva um número em cada círculo da fila abaixo, de modo que a soma de três números quaisquer vizinhos (consecutivos) seja 12.



No último círculo à direita deve estar escrito o número: A) 3; B) 2; C) 1; D) 4; E) 7

(OBM-1998) A soma de todos os números ímpares de dois algarismos menos a soma de todos os números pares de dois algarismos é: A) 50; B) 46; C) 45; D) 49; E) 48

(OBM-1998) O número que devemos somar ao numerador e subtrair do denominador da fração $\frac{1478}{5394}$ para transformá-la na sua inversa é: A) 3.916; B) 3.913; C) 3.915; D) 3.912; E) 3.917

(OBM-1998) Quantos são os números inteiros x que satisfazem à inequação $3 < \sqrt{x} < 7$? A) 13; B) 26; C) 38; D) 39; E) 40

(OBM-1998) Um pai tem 33 anos e seu filho, 7 anos. Depois de quantos anos a idade do pai será o triplo da idade do filho? A) 3; B) 7; C) 6; D) 9; E) 13

(OBM-1998) Qual é o dígito das unidades do número 3^{1998}? A) 1; B) 3; C) 5; D) 7; E) 9

(OBM-1998) No quadrado mágico abaixo, a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é sempre a mesma. Por isso, no lugar do X devemos colocar o número: A)30; B) 20; C) 35; D) 45; E) 40

15	35
50	
25	X

(OBM-1999) Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar? A) 132; B) 144; C) 146; D) 148; E) 152

(OBM-1999) Quantos números de dois algarismos são primos e têm como antecessor um quadrado perfeito? A) 2; B) nenhum; C) 1; D) 3; E) 6

(OBM-1999) O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a: A) 25^{25}; B) 10^{25}; C) 100^{25}; D) 2^{25}; E) 2×25^{25}

(OBM-1999) Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro? A) 5; B) 10; C) 20; D)30; E) 40

(OBM-1999) O número N = 11111 . . . 11 possui 1999 dígitos, todos iguais a 1. O resto da divisão de N por 7 é: A) 1; B) 2; C) 4; D) 5; E) 6

(OBM-1999) Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $2x + 3y = 101$? A) 13; B) 14; C) 15; D) 16; E) 17

(OBM-1999) As representações decimais dos números 2^{1999} e 5^{1999} são escritas lado a lado. O número de algarismos escritos é igual a: A) 1999; B) 2000; C) 2001; D) 3998; E) 3999

(OBM-2000) Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1? A) 1.000 ; B) 10.000 ; C) 50.000 ; D) 100.000 ; E) 500.000

(OBM-2000) Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos? A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4

(OBM-2000) Escrevem-se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo-se 7, 8, 14, 16, …. O 100° número escrito é: A) 406; B) 376; C) 392; D) 384; E) 400

(OBM-2000) Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiram-se ao acaso (sem reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual é a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa, para garantirmos que pelo menos três destas somas sejam iguais? A) 51; B) 52; C) 53; D) 54; E) 55

(São Paulo-2000) Dados 17 números inteiros positivos quaisquer, sempre é possível escolher cinco deles de modo que a soma dos cinco seja divisível por 5. Justifique este fato.

(Rio Grande do Norte-1999) Numa linha, escrevemos 49 números de tal modo que, excepto o primeiro e o último, cada um é igual a soma dos dois vizinhos. Se o primeiro número é 1, ache o último.

(Rio de Janeiro-1998) Um quadrado multiplicativo tem como propriedade que qualquer linha, qualquer coluna e as duas diagonais têm o mesmo produto. Isto é, pela figura abaixo : ABC = DEF = GHI = ADG = BEH = CFI = AEI = CEG = K Mostre que se os números colocados no quadrado forem inteiros, então K (o produto comum) deve ser um cubo perfeito.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

(Rio de Janeiro-1998) Cinco pontos sobre uma circunferência estão numerados consecutivamente 1, 2, 3, 4 e 5, no sentido dos ponteiros do relógio. Uma pulga pula de um ponto a outro da seguinte forma: se ela estiver sobre um ponto de número ímpar, move-se um ponto; e se ela estiver sobre um ponto de número par, move-se dois pontos (sempre no sentido dos ponteiros do relógio). Se a pulga estiver inicialmente no número 1, onde ela estará após 1998 pulos?

(Ceará-1999) Encontre todos os inteiros a e b tais que $a \, . \, b = a + b$

(Ceará-1999) Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação $a \cdot b \cdot c = a + b + c$.

(Ceará-1999) Considere um cubo. A cada uma das suas arestas se atribui um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (a duas arestas distintas são associados números diferentes). Então, atribui-se a cada vértice a soma dos números das arestas que incidem neste vértice. Mostre que os números das arestas que incidem neste vértice não podem ser todos iguais.

(OBM-1997) No edificio mais alto de *Terra Brasilis* moram *Eduardo* e *Augusto*. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de *Augusto*. A soma dos números dos apartamentos dos dois é 2164. Calcule o número do apartamento de *Eduardo* sabendo que há 12 apartamentos por andar. (Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo, de 13 a 24, e assim por diante).

(OBM-1997) Mostre que existem infinitos inteiros positivos n satisfazendo simultáneamente as seguintes condições: A) n é ímpar; B) n possui exatamente 1200 divisores positivos; C) existem exatamente 1997 triângulos retângulos, dois a dois não congruentes, de lados inteiros e n como medida de um dos catetos.

(OBM-1998) Que frações devem ser retiradas da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que a soma das restantes seja igual a 1?

(OBM-1998) Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

(OBM-1998) O menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 9 é 9990. Qual é o menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 3?

(OBM-1999) Corte 10 algarismos do número 1234512345123451234512345, para que o número restante seja o maior possível.

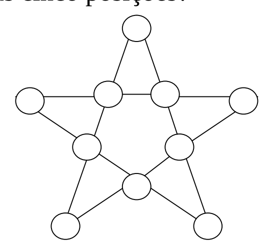
(OBM-1999) Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R$1,00 a R$127,00 pudesse ser paga entregando-se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?

(OBM-1999) Um edifício muito alto possui 1000 andares, excluindo-se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores:
O elevador A pára em todos os andares. O elevador B pára nos andares múltiplos de 5, isto é, 0, 5, 10, 15, … O elevador C pára nos andares múltiplos de 7, isto é, 0, 7, 14, 21, … O elevador D pára nos andares múltiplos de 17, isto é, 0, 17, 34, 51, … O elevador E pára nos andares múltiplos de 23, isto é, 0, 23, 46, 69, … A) Mostre que, excetuando-se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param os 5 elevadores; B) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.

(OBM-1999) Três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem exatamente quatro domingos cada um. Prove que um destes meses é fevereiro.

(OBM-1999) Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de (3, 6, 9, 12) (isto é, {a, b, c, d} = {3, 6, 9, 12}) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

(OBM-2000) Desejamos escrever os inteiros de 1 a 10 nas casas do desenho ao lado de tal forma que quaisquer quatro números alinhados aparecem em ordem crescente ou decrescente. A) Mostre uma maneira de dispor os números respeitando estas condições; B) Quais números podem aparecer nas pontas da estrela?; C) Quais números podem aparecer nas outras cinco posições?



(OBM-2000) Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

(OBM-2000) Qual é o maior inteiro positivo n tal que os restos das divisões de 154, 238 e 334 por n são iguais?

(OBM-2000) De quantas maneiras diferentes podemos construir um paralelepípedo usando exatamente 216 blocos cúbicos de medidas $1 \times 1 \times 1$? *Obs*: Blocos de dimensões $2 \times 3 \times 36$ e $2 \times 36 \times 3$ devem ser considerados iguais.

(OBM-2000) Listamos os inteiros de 1 a n. Desta lista apagamos o inteiro m. A média dos $n - 1$ números restantes é $\frac{134}{11}$. Determine n e m.

(OBM-2000) O campeonato *Venusiano* de futebol é disputado por 10 times, em dois turnos. Em cada turno cada equipe joga uma vez contra cada uma das outras. Suponha que o *Vulcano FC* vença todas as partidas do 1º. turno. Caso não vença o 2º. turno, o *Vulcano FC* jogará uma final contra o vencedor do 2º. turno, na qual terá vantagem caso faça mais pontos que o adversário durante todo o campeonato (vitória vale 3 pontos, empate vale 1 ponto e derrota 0 pontos). A) Determine o menor n tal que, se o *Vulcano FC* fizer *exatamente n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os n pontos); B) Determine o menor n tal que, se o *Vulcano FC* fizer *pelo menos n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os n pontos).

(OBM-1999) Um professor de matemática passou aos seus alunos a adição $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}$ onde A, B, C e D são inteiros positivos, as frações estão simplificadas ao máximo e os denominadores são números primos entre si. Os alunos adicionaram as frações tirando o mínimo múltiplo comum dos denominadores das parcelas e escrevendo este como o denominador do resultado. Mostre que a fração que os alunos encontraram como resultado está simplificada.

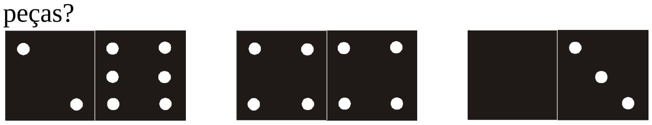
(OBM-2000) Considere a seguinte tabela 5×5, preenchida com os números de 1 a 25.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Em cada fileira horizontal e em cada fileira vertical, trocamos o sinal de 2 números, de forma que, em cada fileira orizontal e em cada fileira vertical, haja 3 números positivos e 2 números negativos. Somamos, então, todos os números da tabela. Calcule os possíveis valores dessa soma.

(OBM-2000) É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra?

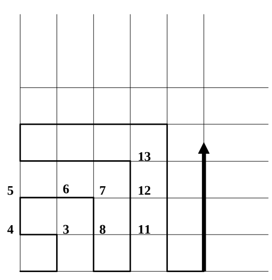
(OBM-2001) O jogo de dominó é formado por 28 peças retangulares distintas, cada uma com duas partes, com cada parte contendo de 0 a 6 pontinhos. Por exemplo, veja três dessas peças. Qual é o número total de pontinhos de todas as peças?



(OBM-2001) Apresente todos os números inteiros positivos menores do que 1000 que têm exatamente três divisores positivos. Por exemplo: o número 4 tem exatamente três divisores positivos: 1, 2 e 4.

(OBM-2001) Seja N o número inteiro positivo dado por $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (196883)^2$. Qual é o algarismo das unidades de N ?

(OBM-2001) Os pontos da rede quadriculada abaixo são numerados a partir do vértice inferior esquerdo seguindo o caminho poligonal sugerido no desenho. Considere o ponto correspondente ao número 2001. Quais são os números dos pontos situados imediatamente abaixo e imediatamente à esquerda dele?



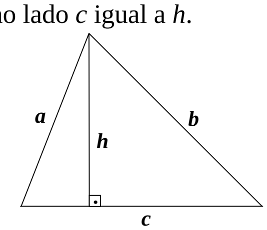
(OBM-2001) Se a n-ésima OBM é realizada em um ano que é divisível por n, dizemos que esse ano é *super-olímpico*. Por exemplo, o ano 2001, em que está sendo realizada a 23ª OBM, é super-olímpico pois 2001 = 87 · 23 é divisível por 23. Determine todos os anos super-olímpicos, sabendo que a OBM nunca deixou de ser realizada desde sua primeira edição, em 1979, e supondo que continuará sendo realizada todo ano.

(OBM-2001) Dizemos que um conjunto A formado por 4 algarismos distintos e não nulos é *intercambiável* se podemos formar dois pares de números, cada um com 2 algarismos de A, de modo que o produto dos números de cada par seja o mesmo e que, em cada par, todos os dígitos de A sejam utilizados. Por exemplo, o conjunto {1;2;3;6} é intercambiável pois 21 · 36 = 12 · 63. Determine todos os conjuntos intercambiáveis.

(OBM-2001) Carlinhos faz um furo numa folha de papel retangular. Dobra a folha ao meio e fura o papel dobrado; em seguida, dobra e fura novamente o papel dobrado. Ele pode repetir esse procedimento quantas vezes quiser, evitando furar onde já havia furos. Ao desdobrar a folha, ele conta o número total de furos feitos. No mínimo, quantas dobras deverá fazer para obter mais de 100 furos na folha?

(OBM-2001) Dizemos que um número natural é *legal* quando for soma de dois naturais consecutivos e também for soma de três naturais consecutivos. A) Mostre que 2001 é legal, mas 1999 e 2002 não são legais; B) Mostre que 2001^{2001} é legal.

(OBM-2001) Dado um inteiro positivo h demonstre que existe um número finito de triângulos de lados inteiros a, b, c e altura relativa ao lado c igual a h.



(OBM-2001) Mostre que não existem dois números inteiros a e b tais que $(a + b)(a^2 + b^2) = 2001$.

(OBM-1997) Dizemos que um conjunto $A \subset N$ satisfaz a propriedade $P(n)$ se A tem n elementos e $A + A = \{x + y$ tal que $x \in A$ e $y \in A\}$ tem $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos. Dado $A \subset N$ finito definimos diâmetro de A como sendo a diferenç entre o maior e o menor elemento de A. Seja $f(n)$ o menor diâmetro que o conjunto A satisfazendo $P(n)$ pode ter. Mostre que $\frac{n^2}{4} \le f(n) < n^3$ para todo $n \ge 2$. Tente mostrar que $f(p) < 2p^2$, para todo número primo p.

(OBM-1999) Encontre as soluções inteiras de $x^3 - y^3 = 999$.

(OBM-2000) Seja f uma função definida nos inteiros positivos da seguinte forma: Dado n, escrevemos $n = 2^a \cdot (2b+1)$, com a e b inteiros e definimos $f(n) = a^2 + a + 1$. Determine o menor inteiro positivo n tal que $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \ge 123456$.

(Putnam-1959) Mostre que todo inteiro possui um multiplo em cujos algarismos na representação decimal figuram todos os dez dígitos.

(União Soviética -1971) Prove que podemos encontrar números divisíveis por 2^n cuja representação decimal possua só uns (1s) e dois (2s).

(União Soviética-1971) São dados três inteiros positivos. Um movimento consiste em substituir $m \leq n$ por $2m$ e $n-m$. Mostre que você pode sempre fazer uma série de movimentos que resultem em transformar um dos inteiros em zero (0).

(União Soviética-1971) Dados 25 inteiros positivos, mostre que se pode sempre encontrar dois tais que nenhum dos outros números se iguale à sua soma ou sua diferença.

(União Soviética-1980) Todos os números de 19 até 80 são escritos um após o outro como um único número N=192021...7980. Temos N um múltiplo de 1980?

(União Soviética -1980) Um número de seis digitos (no sistema decimal) possui seis dígitos distintos, nenhum dos quais vale zero (0) e é divisível por 37. Mostre que podemos obter pelo menos 23 outros números que sejam divisíveis por 37 apenas permutando os algarismos.

(União Soviética -1980) Seja f(n) a soma de n e seus algarismos, na base decimal. Por exemplo, f(34)=41. Existe um inteiro tal que f(n)=1980? Mostre que dado um inteiro positivo m nós podemos encontrar n tal que f(n)=m ou m+1.

(União Soviética-1991) Encontre inteiros distintos n e m tal que mn+n e mn+m são ambos quadrados perfeitos. é possível encontrais tais inteiros entre 988 e 1991?

(Torneio das Cidades-1986) Cada quadrado de um tabuleiro de xadrez 8 x 8 é colorido ou de azul ou de vermelho. Mostre que para uma das cores uma rainha pode visitar todos os quadrados sem visitar os da outra cor. Uma rainha pode se mover qualquer dist\^ancia paralela aos lados do tabuleiro ou às diagonais principais. Ela pode passar por cima de quadrados da cor errada e visitar quadrados mais de uma vez.

(Inglaterra-1966) A) Mostre que dados 52 inteiros positivos existem dois cuja soma ou diferença é multipla de 100; B) Dado um conjunto de 100 inteiros, podemos encontrar um subconjunto não-vazio cuja soma é múltipla de 100.

(Inglaterra-1966) Cem pessoas de diferentes alturas são acomodadas em um tabuleiro 10x 10. X, o mais baixo dentre as 10 pessoas que são mais altas em suas colunas, mede um altura diferente de Y, o mais alto dentre as 10 pessoas mais baixas nas suas linhas. Quem é mais baixo: X ou Y?