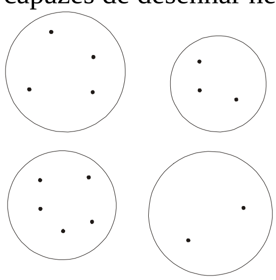
XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática – Fase 1

1) Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. O menor valor possível para a diferença entre eles é:
A) 111; **B)** 49; **C)** 29; **D)** 69; **E)** 5

2) Na figura abaixo, temos 4 circunferências e alguns pontos destacados no interior dessas circunferências. Escolhendo exatamente um desses pontos dentro de cada uma das circunferências, e unindo-os por segmentos de reta que não se cruzam, formamos um quadrilátero. Quantos quadriláteros diferentes seremos capazes de desenhar nessas condições?



A) 4; **B)** 14; **C)** 60; **D)** 120; **E)** 24

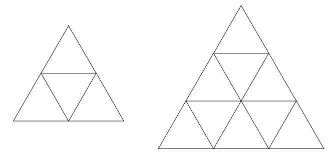
3) Joana escreve a seqüência de números naturais 1, 6, 11, ..., onde cada número, com exceção do primeiro, é igual ao anterior mais cinco. Joana pára quando encontra o primeiro número de três algarismos. Esse número é:
A) 100; **B)** 104; **C**) 101; **D)** 103; **E)** 102

4) Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5?
A) 1; **B)** 3; **C)** 2; **D)** 4; **E)** mais de 4

5) No conjunto {101, 1 001, 10 001, ..., 1 000 000 000 001} cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns desses elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:
A) é igual 11; **B)** é igual a 4; **C)** é menor do que 3; **D)** é maior do que 4 e menor do que 11; **E)** é 3

6) Uma pera tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pera para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma).
A) 15 litros; **B)** 45 litros; **C)** 75 litros; **D)** 80 litro; **E)** 30 litros

7) O triângulo equilátero T à direita tem lado 1. Juntando triângulos congruentes a esse, podemos formar outros triângulos eqüiláteros maiores, conforme indicado no desenho abaixo.



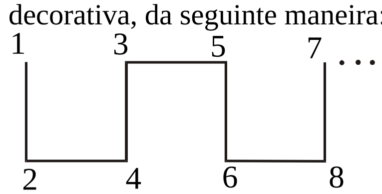
Qual é o lado do triângulo equilátero formado por 49 dos triângulos T?
A) 7; **B)** 49; **C)** 13; **D)** 21 ; **E)** é impossível formar um triângulo equilátero com esse número de triângulos T

8) Os números inteiros positivos de 1 a 1000 são escritos lado a lado, em ordem crescente, formando a seqüência 123456789101112131415... 9991000. Nesta seqüência, quantas vezes aparece o grupo "89"?
A) 98; **B)** 32; **C)** 22; **D)** 89; **E)** 21;

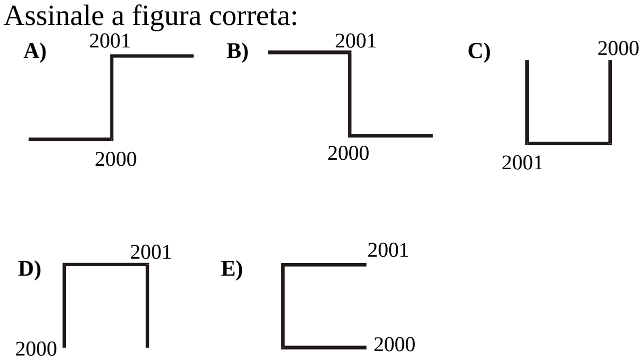
9) Um serralheiro tem 10 pedaços de 3 elos de ferro cada um, mostrados abaixo.

Ele quer fazer uma única corrente de 30 elos. Para abrir e depois soldar um elo o serralheiro leva 5 minutos. Quantos minutos **no mínimo** ele levará para fazer a corrente?
A) 30; **B)** 35; **C)** 40; **D)** 45; **E)** 50

10) Escrevem-se os números naturais numa faixa decorativa, da seguinte maneira:



Assinale a figura correta:



11) 2 melancias custam o mesmo que 9 laranjas mais 6 bananas; além disso, meia dúzia de bananas custa a metade de uma melancia. Portanto, o preço pago por

uma dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas é igual ao preço de:
A) 3 melancias ; **B)** 4 melancias ; **C)** 6 melancias ; **D)** 5 melancias; **E)** 2 melancias

12) Qual é o último algarismo da soma de 70 números inteiros positivos consecutivos?
A) 4; **B)** 0; **C)** 7; **D)** 5; **E)** Faltam dados

13) Em Tumbólia, um quilograma de moedas de 50 centavos equivale em dinheiro a dois quilogramas de moedas de 20 centavos. Sendo 8 gramas o peso de uma moeda de 20 centavos, uma moeda de 50 centavos pesará:
A) 15 gramas ; **B)** 10 gramas ; **C)** 12 gramas ; **D)** 20 gramas; **E)** 22 gramas

14) As medidas dos lados de um retângulo são números inteiros distintos. O perímetro e a área do retângulo se exprimem pelo mesmo número. Determine esse número.
A) 18; **B)** 12; **C)** 24; **D)** 9; **E)** 36

15) O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171.
A soma dos algarismos de N é:
A) 10; **B)** 11; **C)** 12; **D)** 13; **E)** 14

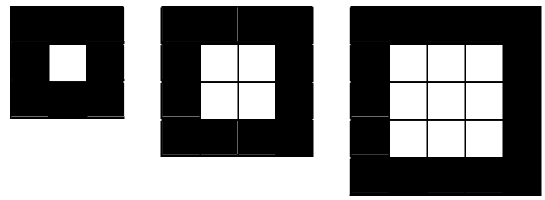
16) Em um tabuleiro retangular com 6 linhas e 9 colunas, 32 casas estão ocupadas. Podemos afirmar que:
A) Todas as colunas têm pelo menos 3 casas ocupadas.
B) Nenhuma coluna tem mais de 3 casas ocupadas.
C) Alguma coluna não tem casas ocupadas.
D) Alguma linha tem pelo menos 6 casas ocupadas.
E) Todas as linhas têm pelo menos 4 casas ocupadas.

17) Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2, e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é:
A) 7; **B)** 8; **C)** 9; **D)** 10; **E)** 11

18) São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como, 11, 121, 411, etc). A soma de todos estes números é:
A) 6882; **B)** 5994; **C)** 4668; **D)** 7224; **E)** 3448

19) Cinco animais $A, B, C, D,$ e $E,$ são cães ou são lobos. Cães sempre contam a verdade e lobos sempre mentem. A diz que B é um cão. B diz que C é um lobo. C diz que D é um lobo. D diz que B e E são animais de espécies diferentes. E diz que A é um cão. Quantos lobos há entre os cinco animais?
A) 1; **B)** 2; **C)** 3; **D)** 4; **E)** 5

20) Com azulejos quadrados brancos e pretos todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos.



A regra para se construir estes mosaicos é a seguinte: inicialmente formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; e em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercado por azulejos pretos; e assim sucessivamente.
Com 80 azulejos pretos, quantos azulejos brancos serão necessários para se fazer uma seqüência de mosaicos como esta?
A) 55; **B)** 65; **C)** 75; **D)** 85; **E)** 100

XX Olimpíada Brasileira de Matemática – Fase 2

1) João comprou um livro e reparou que ele tinha 200 páginas. Seu irmão mais novo arrancou ao acaso 25 folhas e somou os números das 50 páginas.
Explique porque o resultado desta soma não pode ser igual a 1998.
Atenção: cada folha tem duas páginas. A primeira folha tem as páginas 1 e 2, a segunda folha tem as páginas 3 e 4, e assim por diante.

2) Que frações devem ser retiradas da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que a soma das restantes seja igual a 1?

3) Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

4) Existem casas em volta de uma praça. João e Pedro dão uma volta na praça, caminhando no mesmo sentido e contando as casas. Como não começaram a contar da mesma casa, a 5ª. casa de João é a 12ª. de Pedro e a 5ª. casa de Pedro é a 30ª. de João. Quantas casas existem em volta da praça?

5) Existem 20 balas sobre uma mesa e duas crianças começam a comê-las, uma criança de cada vez. Em cada vez, cada criança deve comer pelo menos uma bala e está proibida de comer mais que a metade das balas que existem sobre a mesa. Nesta brincadeira, ganha a criança que deixar apenas uma bala sobre a mesa. Qual das duas crianças pode sempre ganhar na brincadeira: a primeira ou a segunda a jogar? Como deve fazer para ganhar?

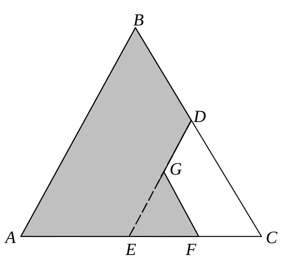
6) Pintam-se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem 10 centímetros. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em 1000 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Determine:
a) o número de cubos que não possuem nenhuma face pintada de preto.
b) o número de cubos que possuem uma única face pintada de preto.
c) o número de cubos que possuem exatamente duas faces pintadas de preto.
d) o número de cubos que possuem três faces pintadas de preto.

XXI Olimpíada Brasileira de Matemática – Fase 2

1) Corte 10 algarismos do número 12345123451234512345123 45, para que o número restante seja o maior possível.

2) Sabe-se que três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem cada um exatamente quatro domingos.
a) Estes meses podem ser janeiro, fevereiro e março?
b) Podem ser agosto, setembro e outubro?

3) Na figura, os triângulos *ABC* e *EGF* são equiláteros. O perímetro do triângulo *ABC* é 132cm e, além disso, *AE* = *EC*, *BD* = *DC*, *EF* = *FC*, *DG* = *GE*.



a) Qual o perímetro da área sombreada?
b) Que fração da área do triângulo *ABC* representa a área sombreada?

4) Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R$1,00 a R$127,00 pudesse ser paga entregando-se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?

5) Um edifício muito alto possui 1000 andares, excluindo-se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores:
O elevador *A* pára em todos os andares.
O elevador *B* pára nos andares múltiplos de 5, isto é, 0, 5, 10, 15, … O elevador *C* pára nos andares múltiplos de 7, isto é, 0, 7, 14, 21, … O elevador *D* pára nos andares múltiplos de 17, isto é, 0, 17, 34, 51, … O elevador *E* pára nos andares múltiplos de 23, isto é, 0, 23, 46, 69, …
a) Mostre que, excetuando-se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param os 5 elevadores.
b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.

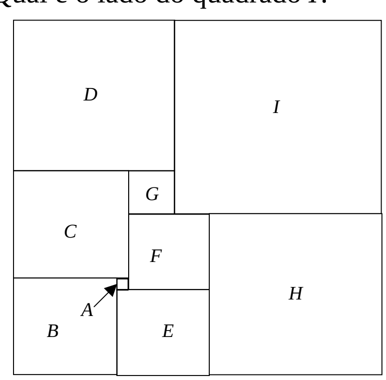
6) Encontre o menor tabuleiro quadrado que pode ser ladrilhado usando peças com o seguinte formato:

Obs: Ladrilhado significa completamente coberto, sem superposição de peças, e de modo que nenhum ponto fora do tabuleiro seja coberto por alguma peça.

XXII Olimpíada Brasileira de Matemática – Fase 2

1) De quantas maneiras diferentes podemos construir um paralelepípedo usando exatamente 24 blocos cúbicos de medidas $1 \times 1 \times 1$?
Obs: Blocos de dimensões $2 \times 3 \times 4$ e $2 \times 4 \times 3$ devem ser considerados iguais.

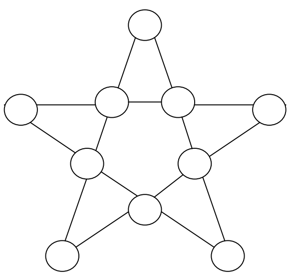
2) O retângulo abaixo está dividido em 9 quadrados, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1 e o quadrado *B* tem lado 9.
Qual é o lado do quadrado *I*?



3) Pintamos de vermelho ou azul 100 pontos em uma reta. Se dois pontos vizinhos são vermelhos, pintamos o

segmento que os une de vermelho. Se dois pontos vizinhos são azuis, pintamos o segmento de azul. Finalmente, se dois pontos vizinhos têm cores distintas, pintamos o segmento de verde. Feito isto, existem exatamente 20 segmentos verdes.
O ponto na ponta esquerda é vermelho.
É possível determinar com estes dados a cor do ponto na ponta direita?
Em caso afirmativo, qual a cor deste ponto?

4) Desejamos escrever os inteiros de 1 a 10 nas casas do desenho ao lado de tal forma que quaisquer quatro números alinhados aparecem em ordem crescente ou decrescente.



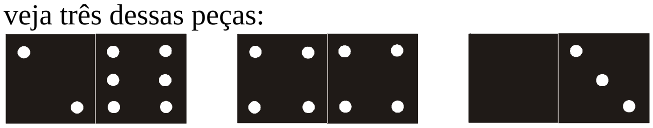
a) Mostre uma maneira de dispor os números respeitando estas condições.
b) Quais números podem aparecer nas pontas da estrela?
c) Quais números podem aparecer nas outras cinco posições?

5) Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

6) Qual é o maior inteiro positivo *n* tal que os restos das divisões de 154, 238 e 334 por *n* são iguais?

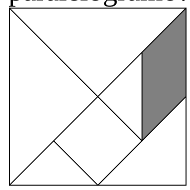
XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática – Fase 2

1) O jogo de dominó é formado por 28 peças retangulares distintas, cada uma com duas partes, com cada parte contendo de 0 a 6 pontinhos. Por exemplo, veja três dessas peças:



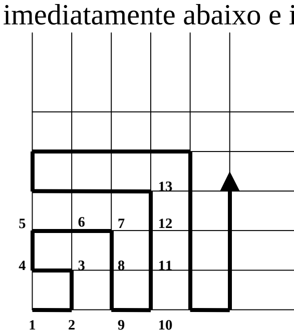
Qual é o número total de pontinhos de todas as peças?

2) As peças de um jogo chamado Tangram são construídas cortando-se um quadrado em sete partes, como mostra o desenho: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Se a área do quadrado grande é 1, qual é a área do paralelogramo?



3) Carlinhos faz um furo numa folha de papel retangular. Dobra a folha ao meio e fura o papel dobrado; em seguida, dobra e fura novamente o papel dobrado. Ele pode repetir esse procedimento quantas vezes quiser, evitando furar onde já havia furos. Ao desdobrar a folha, ele conta o número total de furos feitos. No mínimo, quantas dobras deverá fazer para obter mais de 100 furos na folha?

4) Os pontos da rede quadriculada abaixo são numerados a partir do vértice inferior esquerdo seguindo o caminho poligonal sugerido no desenho. Considere o ponto correspondente ao número 2001. Quais são os números dos pontos situados imediatamente abaixo e imediatamente à esquerda dele?



5) Apresente todos os números inteiros positivos menores do que 1000 que têm exatamente três divisores positivos. Por exemplo: o número 4 tem exatamente três divisores positivos: 1, 2 e 4.

6) Seja N o número inteiro positivo dado por $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (196883)^2$. Qual é o algarismo das unidades de N?