OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA – GRANDE PORTO ALEGRE, 2003

Segunda Fase – Nível 3

INSTRUÇÕES:

- *A duração da prova é de 4 horas;*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livro ou notas;*
- *Você pode solicitar papel para rascunho;*
- *Todas as suas respostas devem ser justificadas.*

PROBLEMA 1:

Mostre que existe um inteiro não nulo múltiplo de *sete* (7) cuja representação em base decimal só contém os algarismos *zero* (0) e *um* (1).

PROBLEMA 2:

Encontre um polinômio não nulo p(x) de coeficientes inteiros para o qual uma das raízes da equação p(x) = 0 seja $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

PROBLEMA 3:

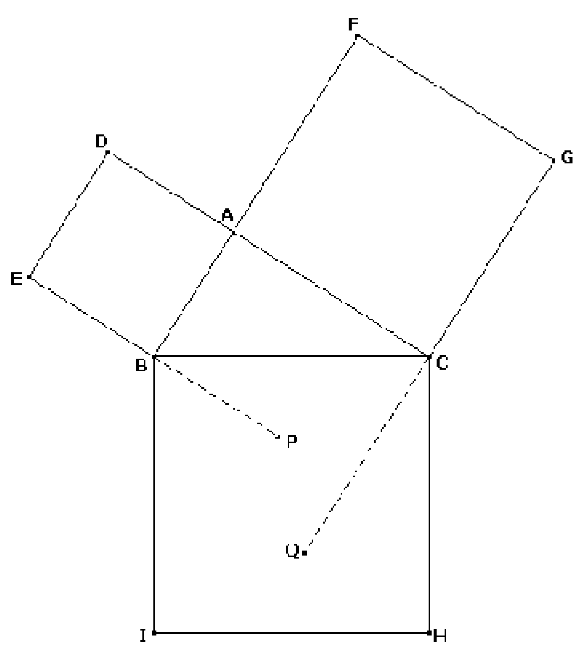
Seja (a_n) uma seqüência de números reais, definida para todo n inteiro positivo, por:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Prove que $a_n \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$.

PROBLEMA 4:

Na figura abaixo o triângulo *ABC* é retângulo em *A*. Os quadriláteros *ABED*, *ACGF* e *BCHI* são quadrados. Estendemos *EB* até *P* tal que *EB* = *BP*; estendemos *GC* até *Q* tal que *GC* = *CQ*.



continua...

a) Prove que o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *PBI* e que o triângulo *BQC* é congruente ao triângulo *HPI*;
b) Prove que área(BPC) = $\frac{1}{2}$ área(ABED) e que área(BQC) = $\frac{1}{2}$ área(ACGF);
c) Demonstre que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Teorema de Pitágoras).

PROBLEMA 5:

Uma empresa tem *cinco* (5) diretores e adotou como regra que seu cofre pode ser aberto, e somente, por uma maioria (três, ou mais) de diretores. Esse cofre tem *dez* (10) fechaduras, cada uma com uma chave diferente, e só abre quando todas as fechaduras tiverem sido abertas.

Diariamente, é sorteado um número *N* do conjunto {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} e cada um dos diretores recebe *N* chaves diferentes. Qual a probabilidade de que o sorteio do número *N* impossibilite a abertura do cofre?