

OLIMPIÁDA REGIONAL DE MATEMÁTICA – GRANDE PORTO ALEGRE, 2003

Segunda Fase – Nível 2

INSTRUÇÕES:

- A duração da prova é de 4 horas;
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livro ou notas;
- Você pode solicitar papel para rascunho;
- Todas as suas respostas devem ser justificadas.

PROBLEMA 1:

Mostre que para qualquer circunferência o raio ou o comprimento é um número irracional. Você pode assumir, sem demonstrar, que o número π é irracional.

PROBLEMA 2:

Sejam a e b números primos que satisfazem $a < b$ e $a + b = 91$.

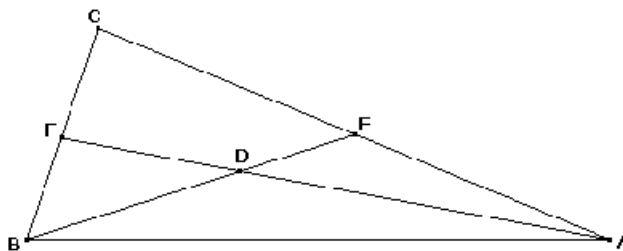
- Encontre um possível par a e b ;
- Mostre que a solução encontrada é única.

PROBLEMA 3:

Encontre um polinômio não nulo $p(x)$ de coeficientes inteiros para o qual uma das raízes da equação $p(x) = 0$ seja $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

PROBLEMA 4:

Calcule a área do triângulo ABC abaixo, dados $BD = 4$, $DE = 2$, $EC = 6$ e $BF = FC = 3$.



PROBLEMA 5:

Marcamos vinte pontos em uma circunferência, numerando-os de 1 a 20 (cada ponto com um número distinto). Traçamos segmentos unindo pares de pontos, de forma que cada ponto seja extremidade de exatamente um segmento. Para cada segmento, calculamos o produto dos números que estão nos seus extremos. A soma de todos esses produtos é S .

Mostre como traçar os segmentos na circunferência de modo que o valor de S seja o maior possível.