

# OLIMPIÁDA REGIONAL DE MATEMÁTICA – GRANDE PORTO ALEGRE, 2003

## Segunda Fase – Nível 1

### INSTRUÇÕES:

- A duração da prova é de 4 horas;
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livro ou notas;
- Você pode solicitar papel para rascunho;
- Todas as suas respostas devem ser justificadas.

### PROBLEMA 1:

Encontre três algarismos não nulos A, B e C que satisfazem a seguinte soma:

$$\begin{array}{r} A B C \\ A B C \\ + A B C \\ \hline C C C \end{array}$$

### PROBLEMA 2:

Sejam a e b números primos que satisfazem  $a < b$  e  $a + b = 91$ .

- Encontre um possível par a e b;
- Mostre que a solução encontrada é única.

### PROBLEMA 3:

Considere um hexágono regular ABCDEF, com os vértices nesta ordem, de área 1. Marcamos o ponto O, interseção das diagonais AD, BE e CF. Destacamos os pontos G, H e I pontos médios dos segmentos AO, OB, BA, respectivamente. Seja J o ponto médio do segmento GH. Calcular a área do triângulo IJG.

### PROBLEMA 4:

Existem algumas pedras distribuídas nas casas de um tabuleiro quadriculado 5 x 5, como mostra o desenho abaixo, conhece-se a quantidade de pedras em apenas algumas das casas.

■	■	?	?	■
?	■	?	?	?
?	?	?	?	■
■	?	■	?	■
?	■	?	?	■

Uma *caminhada longa* pelo tabuleiro consiste em percorrermos o seguinte trajeto: partindo da casa superior esquerda, deslocamo-nos a uma casa vizinha à direita ou abaixo da que estamos, e assim fazemos sucessivamente, até chegarmos na casa inferior direita. Enquanto caminhamos pelas casas do tabuleiro, recolhemos todas as pedras que estão nas casas pelas quais passamos.

Sabe-se que as pedras estão distribuídas de tal forma no tabuleiro que o número de pedras recolhidas em qualquer caminhada longa é sempre o mesmo.

É possível determinar qual a quantidade de pedras recolhidas numa caminhada longa pelo tabuleiro, somente com estes dados fornecidos? Calcule esta quantia, em caso afirmativo.

### **PROBLEMA 5:**

Certa vez, o Mestre de um templo Zen resolveu testar a paciência dos seus oito monges.

Mostrou-lhes uma tábua contendo todos os números naturais de 1 a 5000, em ordem crescente, e uma caneta preta, e então disse-lhes o seguinte:

“Hoje, cada um de vós realizará uma tarefa, um após o outro. Enquanto um trabalhar, os outros deverão meditar incessantemente. O primeiro de vós deverá riscar o número 2, e a partir daí sempre pular um número e riscar o próximo, até o fim da tábua. O segundo de vós deverá riscar os números 2 e 3, e a partir daí sempre pular um número e riscar os próximos dois, até o fim da tábua. O terceiro de vós deverá riscar os números 2, 3 e 4, e a partir daí sempre pular um número e riscar os próximos três, até o fim da tábua. E assim por diante, até o último de vós, que deverá riscar os números de 2 a 9, e a partir daí sempre pular um número e riscar os próximos oito. Quando terminarem, venham falar comigo”.

Os monges executaram a sua tarefa com perfeição. Após acabarem, foram falar com o Mestre, o qual lhes disse: “E então?... Perceberam que, além do número 1, houve um outro número que não foi riscado?”. Eles reconheceram que não haviam se dado conta, e então foram observar a tábua.

Conta a lenda que, quando eles viram o número que não havia sido riscado (além do 1), todos atingiram a iluminação, e então entraram no nirvana.

Que número eles viram?