Olimpíada Regional de Matemática – 2002

Região da Grande Porto Alegre

Segunda Fase — Nível 3

Problema 1

Um tapete retangular é divido, por linhas paralelas a seus lados, em um reticulado $m \times n$ de quadrados, com $m, n \geq 2$ inteiros. Pinta-se cada um de seus quadrados de *branco*, *azul* ou *verde*, obedecendo as seguintes regras:

- se um quadrado é *branco*, aqueles quadrados com apenas **um** vértice em comum são também *brancos*;
- se um quadrado é *azul*, aqueles quadrados com apenas **um** vértice em comum são *verdes*;
- se um quadrado é *verde*, aqueles quadrados com apenas **um** vértice em comum são *azuis*.

Suponha que a quantidade de quadrados brancos, verdes e azuis são todas números primos – lembre-se que 1 não é primo.

Determine todos os valores de m e n para os quais é possível pintar um tapete satisfazendo a essas condições e, para cada par (m, n), mostre como pintar o tapete.

Problema 2

Dentro de uma urna, há b bolas brancas e p bolas pretas satisfazendo $b + p = 2002$ com b e p ímpares. Retiram-se, em cada turno, **duas** bolas e observam-se suas cores:

- se são iguais, ambas são postas no lixo;
- se são distintas, a bola *branca* retorna à urna e a *preta* é posta no lixo.

Suponha que após alguns turnos, reste apenas **uma** bola na urna. Qual é a probabilidade de que essa bola seja branca?

Problema 3

Sejam r e s duas retas perpendiculares entre si que se cruzam no centro O de uma circunferência de raio 1. Considere A um ponto da reta r, externo à circunferência, e M o ponto médio do segmento $\overline{AO}$. Escolhe-se um ponto N da circunferência tal que $MO = MN$. A reta que passa por A e N corta s em B.

Mostre que $AN \times BN = 1$.

Problema 4

Seja S uma seqüência de $n \geq 8$ (n par) inteiros $a_1, a_2, ..., a_n$ tal que existe um inteiro k satisfazendo $a_i + a_j = k$ sempre que $i + j = n + 1$.

Definem-se duas outras seqüências x_i e y_i a partir de S. Os primeiros termos são

$$x_1 = a_1 + a_2 + a_3 \text{ e } y_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5;$$

os segundos,

$$x_2 = a_2 + a_3 + a_4 \text{ e } y_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6;$$

...; os últimos são

$$x_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ e } y_{n-4} = a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Chame $X = x_1 + x_2 + ... + x_{n-2}$ e $Y = y_1 + y_2 + ... + y_{n-4}$.

Encontre todos os valores de n para os quais existe uma seqüência S, como acima, tal que $X + Y = 2002$.

Problema 5

Dizemos que um natural n é *olímpico* se nenhum de seus algarismos é **zero** e a soma deles divide o seu produto. Por exemplo, 257 é olímpico pois $2 + 5 + 7 = 14$ divide $2 \times 5 \times 7 = 70$, mas 89 não é olímpico porque $8 + 9 = 17$ não divide $8 \times 9 = 72$.

Mostre que para todo inteiro $k > 0$ existe um olímpico de k algarismos.